Clases de Simetría de Productos Tensoriales

Alicia Tocino Sánchez

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas, UCM

Seminario de doctorandos
Madrid, 12 Marzo 2015

Para las funciones bilineales de dos variables $f(x, y)$ podemos considerar las dos clases de funciones siguientes:

- funciones simétricas $f_s(x, y) = f_s(y, x)$
- funciones antisimétricas $f_a(x, y) = -f_a(y, x)$

Cualquier función bilineal de dos variables se puede escribir de modo único como suma de una función simétrica y una antisimétrica

$$f(x, y) = f_s(x, y) + f_a(x, y).$$

Cada una de estas clases de funciones se llaman clases de simetría y es un grupo invariante bajo permutaciones.

Consideramos ahora funciones multilineales de tres variables. Tenemos las siguientes clases de funciones:

1. funciones simétricas
   $f_s(x_1, x_2, x_3) = f_s(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$
2. funciones antisimétricas
   $f_a(x_1, x_2, x_3) = sign(\sigma) \cdot f_a(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$
3. funciones cíclicas
   $f_c(x_1, x_2, x_3) + f_c(x_3, x_1, x_2) + f_c(x_2, x_3, x_1) = 0$

Cualquier función multilineal de tres variables se puede escribir de modo único como suma de funciones simétricas, antisimétricas y cíclicas

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_s(x_1, x_2, x_3) + f_a(x_1, x_2, x_3) + f_c(x_1, x_2, x_3).$$

Cada una de estas clases de funciones se llaman clases de simetría y es un grupo invariante bajo permutaciones.

En general, cada función multilineal de n variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede expresar de modo único como suma de p_n funciones distintas, cada una de ellas perteneciendo a una clase de simetría diferente.

$$p_n = \text{número de particiones distintas de } n$$

Esta descomposición se mantiene también para tensores. Por ahora sólo dos clases de simetría de tensores han sido estudiados en profundidad:

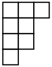
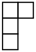
- productos tensoriales simétricos
- productos tensoriales antisimétricos
- ¿y los demás?

Objetivo: dar todas las clases de simetría.

V espacio vectorial de dimensión d:

- $V^{\otimes n} = \{f : \overbrace{V^* \times \ldots \times V^*}^{n} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ multilineal}\}$
- $Sym^n V = \{f : \overbrace{V^* \times \ldots \times V^*}^{n} \longrightarrow \mathbb{C}$ multilineal tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\} \subseteq V^{\otimes n}$
- $\bigwedge^n V = \{f : \overbrace{V^* \times \ldots \times V^*}^{n} \longrightarrow \mathbb{C}$ multilineal tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = sign(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\} \subseteq V^{\otimes n}$
- $\mathbb{S}_\lambda V = \{f : \overbrace{V^* \times \ldots \times V^*}^{n} \longrightarrow \mathbb{C}$ multilineal tal que $\ldots\ldots\} \subseteq V^{\otimes n}$ con $|\lambda| = n$
- $V^{\otimes n} = \bigoplus_\lambda \mathbb{S}_\lambda V$ donde la suma recorre todos los diagramas de Young λ tales que $|\lambda| = n$.

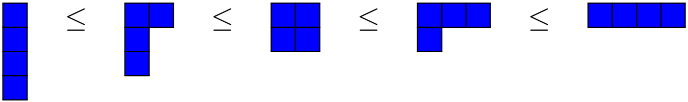
- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ diagrama de Young ($\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m$):

$$\lambda = (3, 2, 2, 1) =$$  $$\lambda = (2, 1, 1) =$$ 

- $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m$ número de cajas
- diagrama de Young conjugado λ^*: simetría respecto de la diagonal
- orden parcial entre dos diagramas de Young λ, μ:
  $\lambda \leq \mu$ si y sólo si:
  - $|\lambda| = |\mu|$
  - $\lambda_1 \leq \mu_1$
  - $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_3 \leq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \ldots$

- Conjunto crítico de λ ($Crit(\lambda)$): conjunto de elementos minimales del complementario del conjunto parcialmente ordenado $\{\mu : \mu \leq \lambda\}$
- π denota particiones de $\{1, \ldots, n\}$
- σ denota permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$
- de cada permutación podemos obtener una partición descomponiendo σ en ciclos ($par(\sigma) = \pi$)
- $shape(\pi) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ diagrama de Young correspondiente a la forma de π
- $Pos(\pi) = \{\sigma \text{ tal que } par(\sigma) \leq \pi\}$
- $Neg(\pi) = \{sign(\sigma)\sigma \text{ tal que } par(\sigma) \leq \pi\}$

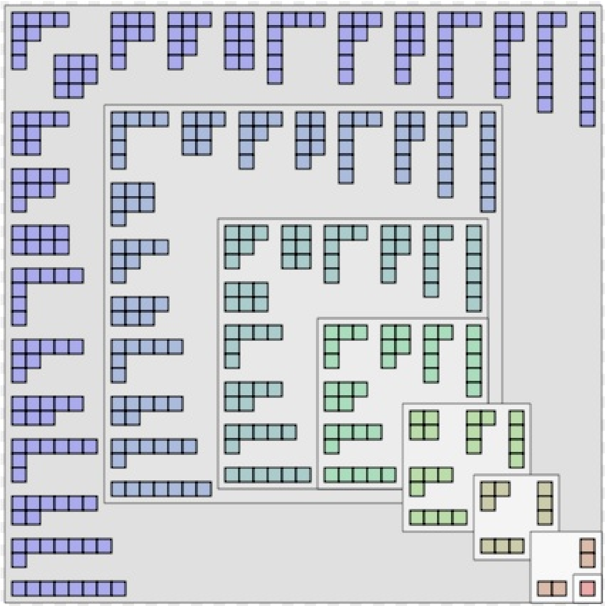
Si consideramos $V^{\otimes 4}$, entonces tenemos que considerar los diagramas de Young de 4 cajas. Los ordenamos según el orden parcial:



$$(1,1,1,1) \leq (2,1,1) \leq (2,2) \leq (3,1) \leq (4)$$

Damos los conjuntos críticos correspondientes:

- $Crit(1,1,1,1) = (2,1,1)$
- $Crit(2,1,1) = (2,2)$
- $Crit(2,2) = (3,1)$
- $Crit(3,1) = (4)$
- $Crit(4) = \emptyset$



Teorema

Sea V espacio vectorial de dimensión d y $f \in \mathbb{S}_\lambda V$ donde λ es un diagrama de Young de n cajas.
Sea π una partición tal que shape(π) pertenece al conjunto crítico de λ, entonces

$$\sum_{\sigma \in Pos(\pi)} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = 0 \tag{1}$$

Sea π partición tal que shape(π) pertenece al conjunto crítico de λ^*, entonces

$$\sum_{\sigma \in Neg(\pi)} (f_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = 0 \tag{2}$$

La clase de simetría de $\mathbb{S}_\lambda V$ está generada por las funciones que cumplen (1) y (2). Las clases de simetrías de $V^{\otimes n}$ están formadas por las funciones que cumplen (1) y (2) para todos los diagramas de Young posibles de n cajas.

$\lambda = (1, 1, 1, 1)$

$Crit(1, 1, 1, 1) = (2, 1, 1) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones π de la forma $(2, 1, 1)$ y aplicamos $Pos(\pi)$:

- $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_2, x_1, x_3, x_4) = 0$
- $\{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_2, x_1, x_4) = 0$
- $\{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_4, x_2, x_3, x_1) = 0$
- $\{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_3, x_2, x_4) = 0$
- $\{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_4, x_3, x_2) = 0$
- $\{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_4, x_3) = 0$

$Crit(1, 1, 1, 1)^* = Crit(4) = \emptyset$

Estas ecuaciones corresponden con las de $\bigwedge^4 V$.

$\lambda = (2, 1, 1)$

$Crit(2, 1, 1) = (2, 2) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma $(2, 2)$ y aplicamos $Pos(\pi)$:

- $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_4, x_3) + f(x_2, x_1, x_3, x_4) + f(x_2, x_1, x_4, x_3) = 0$
- $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_4, x_3, x_2) + f(x_3, x_2, x_1, x_4) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0$
- $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_3, x_2, x_4) + f(x_4, x_2, x_3, x_1) + f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 0$

$Crit(2, 1, 1)^* = Crit(3, 1) = (4) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma (4) y aplicamos $Neg(\pi)$:

- $\{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \sum sign(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = 0$

$\lambda = (2, 2)$

$Crit(2, 2) = (3, 1) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma $(3, 1)$ y aplicamos $Pos(\pi)$:

- $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_2, x_3, x_1, x_4) + f(x_3, x_1, x_2, x_4) + f(x_2, x_1, x_3, x_4) + f(x_3, x_2, x_1, x_4) + f(x_1, x_3, x_2, x_4) = 0$
- $\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_2, x_4, x_1) + f(x_4, x_2, x_1, x_3) + f(x_1, x_2, x_4, x_3) + f(x_4, x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_2, x_1, x_4) = 0$
- $\{\{1, 2, 4\}, \{3\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_2, x_4, x_3, x_1) + f(x_4, x_1, x_3, x_2) + f(x_1, x_4, x_3, x_2) + f(x_4, x_2, x_3, x_1) + f(x_2, x_1, x_3, x_4) = 0$
- $\{\{2, 3, 4\}, \{1\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_3, x_4, x_2) + f(x_1, x_4, x_2, x_3) + f(x_1, x_2, x_4, x_3) + f(x_1, x_4, x_3, x_2) + f(x_1, x_3, x_2, x_4) = 0$

$\lambda = (2,2)$

$Crit(2,2)^* = Crit(2,2) = (3,1) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma $(3,1)$ y aplicamos $Neg(\pi)$:

- $\{\{1,2,3\},\{4\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1,x_2,x_3,x_4) + f(x_2,x_3,x_1,x_4) + f(x_3,x_1,x_2,x_4) - f(x_2,x_1,x_3,x_4) - f(x_3,x_2,x_1,x_4) - f(x_1,x_3,x_2,x_4) = 0$
- $\{\{1,3,4\},\{2\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1,x_2,x_3,x_4) + f(x_3,x_2,x_4,x_1) + f(x_4,x_2,x_1,x_3) - f(x_1,x_2,x_4,x_3) - f(x_4,x_2,x_3,x_1) - f(x_3,x_2,x_1,x_4) = 0$
- $\{\{1,2,4\},\{3\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1,x_2,x_3,x_4) + f(x_2,x_4,x_3,x_1) + f(x_4,x_1,x_3,x_2) - f(x_1,x_4,x_3,x_2) - f(x_4,x_2,x_3,x_1) - f(x_2,x_1,x_3,x_4) = 0$
- $\{\{2,3,4\},\{1\}\} \Rightarrow$
  $f(x_1,x_2,x_3,x_4) + f(x_1,x_3,x_4,x_2) + f(x_1,x_4,x_2,x_3) - f(x_1,x_2,x_4,x_3) - f(x_1,x_4,x_3,x_2) - f(x_1,x_3,x_2,x_4) = 0$

$\lambda = (3, 1)$

$Crit(3, 1) = (4) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma (4) y aplicamos $Pos(\pi)$:

- $\{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \sum f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = 0$

$Crit(3, 1)^* = Crit(2, 1, 1) = (2, 2) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma $(2, 2)$ y aplicamos $Neg(\pi)$:

- $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1, x_2, x_4, x_3) - f(x_2, x_1, x_3, x_4) + f(x_2, x_1, x_4, x_3) = 0$
- $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1, x_4, x_3, x_2) - f(x_3, x_2, x_1, x_4) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0$
- $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_1, x_3, x_2, x_4) - f(x_4, x_2, x_3, x_1) + f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 0$

$\lambda = (4)$

$Crit(4) = \emptyset \Rightarrow$ No hay ecuaciones $Pos(\pi)$
$Crit(4)^* = Crit(1,1,1,1) = (2,1,1) \Rightarrow$ Calculamos todas las particiones posibles π de la forma $(2,1,1)$ y aplicamos $Neg(\pi)$:

- $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\} \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_2,x_1,x_3,x_4) = 0$
- $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\} \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_3,x_2,x_1,x_4) = 0$
- $\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\} \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_4,x_2,x_3,x_1) = 0$
- $\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\} \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_3,x_2,x_4) = 0$
- $\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\} \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_4,x_3,x_2) = 0$
- $\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\} \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3,x_4) - f(x_1,x_2,x_4,x_3) = 0$

Estas ecuaciones corresponden con las de $Sym^4 V$.

¡Muchas gracias!