Caracterización cohomológica de Fibrados Universales de la Grassmanniana de Rectas

Alicia Tocino Sánchez

Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas, UCM

Congreso de Jóvenes Investigadores RSME

10 Septiembre 2015, Murcia

Motivación

- Criterio de Horrock $\rightsquigarrow$ *un fibrado vectorial F sobre $\mathbb{P}^n$ escinde si y sólo si F no tiene cohomología intermedia*
- Ottaviani $\rightsquigarrow$ *criterio de escisión para $\mathbb{G}(k,n)$ y cuádricas*
- Arrondo y Graña $\rightsquigarrow$ *caracterizaron* $\oplus\mathcal{O}(l_{i_0})\bigoplus\oplus\mathcal{Q}(l_{i_1})$ $(\mathbb{G}(1,4))$
- Costa y Miró-Roig $\rightsquigarrow$ *caracterizaron* $\mathbb{S}_\lambda\mathcal{Q}$ $(\mathbb{G}(k,n))$
- Arrondo y Malaspina $\rightsquigarrow$ *mejoraron el criterio de escisión para la Grassmanniana de rectas*

Notación para $\mathbb{G}(1,n)$:

- $\mathbb{G}(1,n) = \{$subespacios de dimensión 1 de $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)\}$
- $\mathcal{Q}^\vee = \{(v,\Lambda) \in V^* \times \mathbb{G}(1,n) \,|\, v \in \Lambda\}$
- La sucesión exacta universal es:

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}^\vee \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\rho} \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

- $\mathcal{Q}^\vee$ fibrado universal de rango 2
- $\mathcal{S}$ fibrado universal de rango $n-1$
- Aplicando $\wedge^j \rho$ obtenemos algunos complejos de Eagon-Northcott

Los siguientes son equivalentes:

- $\mathcal{O}$ es un sumando directo de F
- existen aplicaciones $\mathcal{O} \longrightarrow F$ y $F \longrightarrow \mathcal{O}$ cuya composición es no nula

Podemos relacionar la composición con un par perfecto dado por la dualidad de Serre:

$$Hom(\mathcal{O}, F) \times Hom(F, \mathcal{O}) \longrightarrow Hom(\mathcal{O}, \mathcal{O})$$

$$(H^0(F) \times H^0(F^\vee) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}))$$

Podemos obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{array}{rcl}
H^{n-1}(F \otimes S^{n-1}\mathcal{Q}(-n)) \times H^{n-1}(F^\vee \otimes S^{n-1}\mathcal{Q}^\vee(-1)) & \xrightarrow{\phi} & H^{2n-2}(\mathcal{O}(-n-1)) \\
\uparrow id \times \psi_2 & \circlearrowleft & \psi_4 \uparrow \simeq \\
H^{n-1}(F \otimes S^{n-1}\mathcal{Q}(-n)) \times H^0(F^\vee) & \longrightarrow & H^{n-1}(S^{n-1}\mathcal{Q}(-n)) \\
\uparrow \psi_1 \times id & \circlearrowleft & \psi_3 \uparrow \simeq \\
H^0(F) \times H^0(F^\vee) & \xrightarrow{\phi'} & H^0(\mathcal{O})
\end{array}
$$

Usamos el siguiente complejo de Eagon-Northcott para construir la aplicación sobreyectiva $\psi_1 : H^0(F) \longrightarrow H^{n-1}(F \otimes S^{n-1}\mathcal{Q}(-n))$:

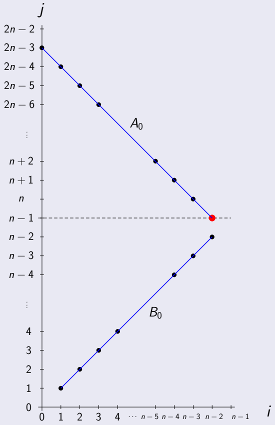
$$0 \to S^{n-1}\mathcal{Q}(-n) \to V^* \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(-n+1) \to \bigwedge^2 V^* \otimes S^{n-3}\mathcal{Q}(-n+2) \to \dots$$
$$\dots \to \bigwedge^{n-2} V^* \otimes \mathcal{Q}(-2) \to \bigwedge^{n-1} V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0$$

Y el siguiente complejo para construir la apliación sobreyectiva $\psi_2 : H^0(F^\vee) \longrightarrow H^{n-1}(F^\vee \otimes S^{n-1}\mathcal{Q}^\vee(-1))$:

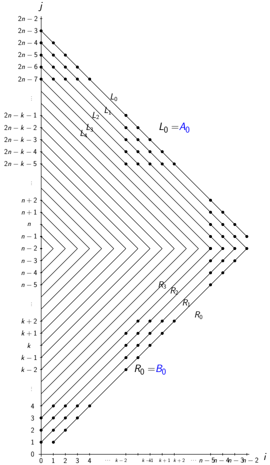
$$0 \to S^{n-1}\mathcal{Q}^\vee(-1) \to V^* \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}^\vee(-1) \to \bigwedge^2 V^* \otimes S^{n-3}\mathcal{Q}^\vee(-1) \to \dots$$
$$\dots \to \bigwedge^{n-2} V^* \otimes \mathcal{Q}^\vee(-1) \to \bigwedge^{n-1} V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0$$

Paso 0

(Criterio de escisión) Un fibrado vectorial F sobre $\mathbb{G}(1,n)$ escinde si y sólo si $H^j_*(F \otimes S^i\mathcal{Q}) = 0$ donde $(i,j) \in A_0 \cup B_0$.



Comparamos con el criterio de escisión dado por Ottaviani.



Objetivo: Caracterizar sumas directas de twists de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{Q}$.

Como antes, las siguientes son equivalentes:

- $\mathcal{Q}$ es un sumando directo de F
- existen aplicaciones $\mathcal{Q} \longrightarrow F$ y $F \longrightarrow \mathcal{Q}$ cuya composición es no nula

Podemos relacionar la composición con un par perfecto dado por la dualidad de Serre:

$$Hom(\mathcal{Q}, F) \times Hom(F, \mathcal{Q}) \longrightarrow Hom(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})$$

$$(H^0(F \otimes \mathcal{Q}^\vee) \times H^0(F^\vee \otimes \mathcal{Q}) \longrightarrow H^0(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{Q}))$$

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H^{n-1}(F \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(-n)) \times H^{n-1}(F^\vee \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}^\vee(-1)) & \xrightarrow{\phi} & H^{2n-2}(\mathcal{O}(-n-1)) \\
\uparrow \psi_1 \times id & \circlearrowleft & \psi_3 \uparrow \simeq \\
H^0(F \otimes \mathcal{Q}^\vee) \times H^{n-1}(F^\vee \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}^\vee(-1)) & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathcal{Q}^\vee \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}^\vee(-1)) \\
\uparrow id \times \psi_2 & \circlearrowleft & \psi_4 \uparrow \simeq \\
H^0(F \otimes \mathcal{Q}^\vee) \times H^0(F^\vee \otimes \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\phi'} & H^0(\mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{Q})
\end{array}$$

Construimos las aplicaciones sobreyectivas ψ_1 y ψ_2 usando los complejos de Eagon-Northcott siguientes.

Para $\psi_1 : H^0(F \otimes \mathcal{Q}^\vee) \longrightarrow H^{n-1}(F \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(-n))$ usamos:

$$0 \longrightarrow S^{n-2}\mathcal{Q}(-n) \longrightarrow V^* \otimes S^{n-3}\mathcal{Q}(-n+1) \longrightarrow \bigwedge^2 V^* \otimes S^{n-4}\mathcal{Q}(-n+2) \longrightarrow \dots$$

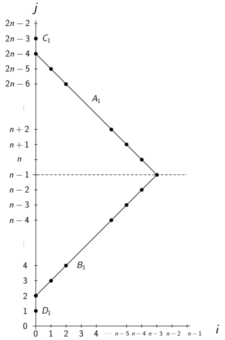
$$\dots \longrightarrow \bigwedge^{n-3} V^* \otimes \mathcal{Q}(-3) \longrightarrow \bigwedge^{n-2} V^* \otimes \mathcal{O}(-2) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{Q}^\vee \longrightarrow 0$$

Y para $\psi_2 : H^0(F^\vee \otimes \mathcal{Q}) \longrightarrow H^{n-1}(F^\vee \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}^\vee(-1))$ usamos:

$$0 \longrightarrow S^{n-2}\mathcal{Q}^\vee(-1) \longrightarrow V^* \otimes S^{n-3}\mathcal{Q}^\vee(-1) \longrightarrow \bigwedge^2 V^* \otimes S^{n-4}\mathcal{Q}^\vee(-1) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \bigwedge^{n-3} V^* \otimes \mathcal{Q}^\vee(-1) \longrightarrow \bigwedge^{n-2} V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

Si sólo suponemos las anulaciones de cohomología que hacen que ψ_1 y ψ_2 sean sobreyectivas estamos caracterizando las sumas directas de twists de $\mathcal{Q}$. Las condiciones son $H^j_*(F \otimes S^i \mathcal{Q}) = 0$ con (i, j) en la siguiente figura.



Ideas para caracterizar sumas directas de twists de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{Q}$:

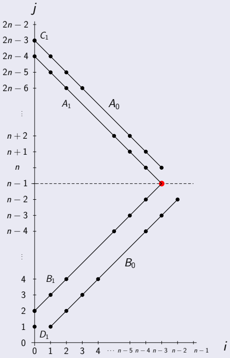
- Quitar una hipótesis de **Paso 0** $(H_*^{n-1}(F \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}) \neq 0)$
- **Nuestras condiciones**: las restantes del Paso 0 y las que caracterizan sumas directas de twists de $\mathcal{Q}$
- Inducción sobre $\sum_l h^{n-1}(F \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(l)) = m$.
  - $m = 0 \Rightarrow$ Paso 0
  - suponemos el resultado cierto para $m - 1$
  - probamos el resultado para $m \neq 0$

Esquema de la prueba:

- Existe un l tal que $H^{n-1}(F \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(l)) \neq 0$ (escogemos $l = -n$)
- Tenemos el diagrama conmutativo anterior $\Rightarrow$ F tiene como sumando directo $\mathcal{Q}$:
$$F = \mathcal{Q} \oplus F'$$
- F' satisface las mismas hipótesis que F y
$$m' := \sum_{l} h^{n-1}(F' \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(l)) = m - 1$$
- Aplicando la hipótesis de inducción a F' $\Rightarrow$ F se puede expresar como suma directa de twists de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{Q}$

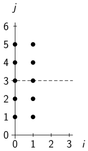
Paso 1

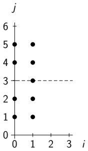
Un fibrado vectorial F sobre $\mathbb{G}(1,n)$ se puede expresar como suma directa de twists de $\mathcal{O}$ y de $\mathcal{Q}$ si y sólo si $H^j_*(F \otimes S^i\mathcal{Q}) = 0$ donde (i,j) son los puntos en la siguiente figura.



Podemos comparar este resultado con el dado por E. Arrondo y B. Graña para $\mathbb{G}(1,4)$.

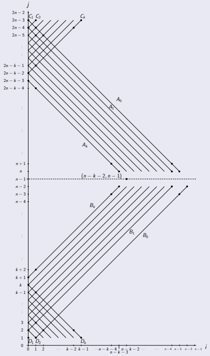
Un fibrado vectorial F de $\mathbb{G}(1,4)$ se puede expresar como suma directa de twists de $\mathcal{O}$ y $\mathcal{Q}$ si y sólo si $H^j_*(F \otimes S^i\mathcal{Q}) = 0$ donde los puntos (i,j) están representados en la siguiente figura.





Paso k

Un fibrado vectorial F sobre $\mathbb{G}(1,n)$ se puede expresar como suma directa de twists de $\mathcal{O}$, $\mathcal{Q}$, $S^2\mathcal{Q}$, ..., $S^{k-1}\mathcal{Q}$ y $S^k\mathcal{Q}$ con $k \leq n-2$ si y sólo si $H^j_*(F \otimes S^i\mathcal{Q}) = 0$ donde (i,j) son los puntos de la siguiente figura.



Para usar categorías derivadas consideramos la siguiente resolución de la diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ donde $X = \mathbb{G}(k, n)$:

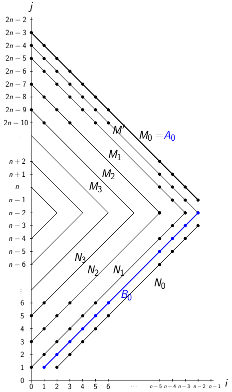
$$0 \to \bigwedge^{(k+1)(n-k)}(\mathcal{Q}^\vee \boxtimes \mathcal{S}^\vee) \to \dots \bigwedge^2(\mathcal{Q}^\vee \boxtimes \mathcal{S}^\vee) \to \mathcal{Q}^\vee \boxtimes \mathcal{S}^\vee \to \mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

Estos elementos descomponene de la siguiente manera:

$$\bigwedge^r(\mathcal{Q}^\vee \boxtimes \mathcal{S}^\vee) = \bigoplus_{|\lambda|=r} \mathbb{S}_\lambda \mathcal{Q}^\vee \boxtimes \mathbb{S}_{\lambda'} \mathcal{S}^\vee$$

donde la suma recorre todos los diagramas de Young con r cajas, λ' es el diagrama de Young conjugado y $\mathbb{S}_\lambda$ es el functor de Schur asociado al diagrama λ

Las condiciones $H^j_*(F \otimes S^i\mathcal{Q}) = 0$ del criterio de escisión obtenido usando categorías derivadas para el caso de la Grassmanniana de rectas corresponden con los puntos (i, j) de la siguiente figura.



Observamos que $H^{2n-2}(\mathcal{O}(-n-1)) = Ext^{2n-2}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-n-1))$ y que el elemento que lo genera es precisamente:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-n-1) \longrightarrow \bigwedge^{n-1} V \otimes \mathcal{O}(-n-2) \longrightarrow \bigwedge^{n-2} V \otimes \mathcal{Q}(-n) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \bigwedge^{2} V \otimes S^{n-3}\mathcal{Q}(-n) \longrightarrow V \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(-n) \longrightarrow V^* \otimes S^{n-2}\mathcal{Q}(-n+1) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \bigwedge^{n-2} V^* \otimes \mathcal{Q}(-2) \longrightarrow \bigwedge^{n-1} V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

Conclusión:

La resolución de la diagonal tiene muchas más piezas que el complejo anterior.

¡Muchas Gracias!