Proyecto Fin de Máster en Investigación Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid

Fibrados vectoriales y grassmannianas

Alicia Tocino Sánchez
Director: Enrique Arrondo Esteban
Curso académico 2009-2010

24 Septiembre 2010

Key words: grassmannian, Plücker embedding , universal bundles, Eagon-Northcott complex
Palabras claves: grassmannianas, embedding de Plücker, fibrados universales, complejos de Eagon-Northcott
2000 Mathematics Subject Clasification: 14M15

Resumen

El objetivo de este trabajo es dar una expresión para el fibrado conormal del espacio grassmanniano de rectas $\mathbb{G}(1, n)$. Para ello debemos empezar explicando algunos conceptos que nos harán falta sobre los espacios grassmannianos generales $\mathbb{G}(k, n)$ (inmersión de Plücker, coordenadas Plücker, fibrados universales...). Luego utilizaremos varias sucesiones exactas, entre ellas la sucesión exacta universal y el complejo de Eagon-Northcott, para construir un diagrama. Al probar que dicho diagrama es conmutativo podremos identificar el fibrado conormal de $\mathbb{G}(1, n)$ con la parte alternada de uno de los fibrados universales usando el lema de la serpiente.

Abstract

The aim of this document addresses to establish an expression for the conormal bundle of the grassmannian $\mathbb{G}(1, n)$. In order to achieve that, it must be necessary to explain some of the concepts that will be used regarding the general grassmannian spaces $\mathbb{G}(k, n)$ (Plücker embedding, Plücker coordenates, universals bundles...). Eventually several exact successions will be used, the universal exact sequence and the Eagon-Northcott complex amongst them, in order to build a diagram. By means of testing that such diagram is commutative, we will be able to identify the conormal bundle of $\mathbb{G}(1, n)$ with the alternated part from on of the universals bundles by using the Snake Lemma.

Índice

1. Introducción

Una de las herramientas mas imortantes para entender la geometría de los embedding de una subvariedad dentro de un espacio mayor es estudiar el fibrado normal de un embedding. Por ejemplo, las deformaciones de los embedding corresponden con secciones del fibrado normal. El caso en el que el espacio ambiente es el espacio poryectivo ha sido estudiado exhaustivamente a lo largo del tiempo. Como un ejemplo del interés del fibrado normal de variedades proyectivas, la conjetura de Hartshorne está relacionada con que el fibrado normal escinda y la amplitud del fibrado normal nos facilita una simple demostración del teorema de Baryh-Larsen usando el teorema de desaparición de Le Potier para fibrados vectoriales amplios [6]

El objetivo de este trabajo es poder dar una expresión particular para el fibrado normal en el caso de tratar con $\mathbb{G}(1, n)$. Para ello estudiaremos a fondo el embedding de Plücker y los fibrados universales [1] ya que identificaremos el fibrado normal con la parte alternada de uno de los fibrados universales.

2. Preliminares

Para esta sección nos apoyaremos en la notación y los conceptos usados en [1].

2.1. Las grassmannianas como variedades

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica 0 (podemos suponer que tratamos con el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$). Consideramos también $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo de todos los hiperplanos de V. Otra forma de ver $\mathbb{P}(V)$ es como el conjunto de rectas en V^*.

Definición 2.1. *Definimos las grassmannianas $\mathbb{G}(k, n)$ como el conjunto de subespacios lineales $k-$dimensionales de $\mathbb{P}^n$. También podemos identificarlo naturalmente con el conjunto de subespacios lineales $(k+1)-$dimensional de V^* (o con el conjunto de cocientes $(n-k)-$dimensionales de V).*

Durante esta sección abusaremos un poco de la notación ya que identificaremos un $k-$plano de $\mathbb{P}^n$ con el correspondiente subespacio lineal $(k+1)-$dimensional de V^*.

Algunos casos particulares son los siguientes:

- $\mathbb{G}(0,n) = \mathbb{P}^n$
- $\mathbb{G}(n-1,n) = \mathbb{P}^{n^*}$

Ahora daremos estructura de variedad a $\mathbb{G}(k,n)$. La idea es recubrirlos por cartas afines y analizaremos cómo funcionan en la intersección de dichos conjuntos afines.

Empezamos fijando un sistema de coordenadas $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{P}^n$ o equivalentemente, fijaremos una base $\{w_0, \ldots, w_n\}$ de V^*. Representaremos un elemento Λ de $\mathbb{G}(k,n)$ por una matriz (a_{ij}) que llamaremos matriz de Plücker

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{00} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k0} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

donde las filas son las coordenadas de una base de Λ.

Si cambiamos la base de Λ, la matriz Plücker cambia multiplicando a la izquierda por una matriz cuadrada (no degenerada) de dimensión $k+1$ que corresponde al cambio de base en Λ.

Si asumimos que el menor correspondiente a las primeras $k+1$ columnas no es cero, podemos multiplicar por una matriz determinada y así representar Λ de forma única por la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{0k+1} & \ldots & b_{0n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{1k+1} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{kk+1} & \ldots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

Así sabemos que $\mathbb{G}(k,n)$ contiene un subconjunto abierto afín de dimensión $(k+1)(n-k)$ de coordenadas $b_{0k+1}, \ldots, b_{kn}$. Este subconjunto puede ser descrito como el conjunto de $k-$planos que no cortan al $(n-k-1)-$plano de ecuaciones $x_0 = \ldots = x_k = 0$.

Como al menos uno de los menores de orden $k+1$ de la matriz Plücker no es cero, $\mathbb{G}(k,n)$ puede ser recubierto por $\binom{n+1}{k+1}$ piezas afines.

Notación 2.2. *Denotamos por $U_{i_0,\ldots,i_k}$ al subconjunto abierto afín de $\mathbb{G}(k,n)$ correspondiente al subespacio que no corta al $(n-k-1)-$plano de ecuaciones $x_{i_0} = \ldots = x_{i_k} = 0$. O equivalentemente, subespacio tal que el menor maximal de la matriz de Plücker considerando las columnas $i_0, \ldots, i_k$ no es cero.*

Faltaría describir el cambio de coordenadas de una pieza a otra. Así demostraríamos que $\mathbb{G}(k,n)$ es una variedad abstracta de dimensión $(k+$

1)$(n-k)$. Como el caso general es engorroso, lo veremos en el caso particular de $k=1$ y $n=3$ en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3. *Supongamos que $k=1$ y $n=3$. Consideramos dos piezas afines U_{01} y U_{02}. Corresponden a las matrices siguientes:*

$$\mathbf{U_{01}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U_{02}} \approx \begin{pmatrix} 1 & a' & 0 & b' \\ 0 & c' & 1 & d' \end{pmatrix}$$

Tienen intersección cuando $c \neq 0$ en U_{01} y $c' \neq 0$ en U_{02}. La primera matriz representa la misma línea que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} & 0 & b-\frac{ad}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} & 1 & \frac{d}{c} \end{pmatrix}$$

El cambio de coordenadas de U_{01} a U_{02} viene dado por:

$$\phi(a,b,c,d) = (-\frac{a}{c}, b-\frac{ad}{c}, \frac{1}{c}, \frac{d}{c}) = (a'.b', c', d')$$

que es un isomorfismo de $\{c \neq 0\}$ a $\{c' \neq 0\}$.

2.2. Embedding de Plücker

Para ver $\mathbb{G}(k,n)$ como una variedad proyectiva, necesitamos considerar la siguiente aplicación que llamaremos *embedding de Plücker*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{kn}: & \mathbb{G}(k,\mathbb{P}(V)) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V^*) \\ & L[v_0,\ldots,v_k] & \longmapsto & [v_0 \wedge \ldots \wedge v_k] \end{array}$$

donde $L[v_0,\ldots,v_k]$ representa el espacio lineal en $\mathbb{P}(V)$ generado por los vectores linealmente independientes $v_0,\ldots,v_k \in V^*$ y $[v_0 \wedge \ldots \wedge v_k]$ simboliza el punto de $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ representado por $v_0 \wedge \ldots \wedge v_k$ (tomando en $\bigwedge^{k+1} V^*$ la base $\{\ldots, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{k+1}}, \ldots\}$).

Fijamos una base en V^* y la inducida en $\bigwedge^{k+1} V$. Entonces φ_{kn} asocia al espacio generado por las filas $v_0,\ldots,v_k$ de la matriz de Plücker un punto en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ cuyas coordenadas son las del menor maximal de la matriz. Es decir, φ_{kn} asocia a un espacio definido por una matriz de Plücker el punto de $\mathbb{P}^{\binom{n+1}{k+1}-1}$ cuyas coordenadas son todos los menosres de orden $k+1$ de la matriz. Además se verifica que φ_{kn} está bien definido.

Definición 2.4. *Las coordenadas homogéneas en* $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ *inducidas por la elección de las coordenadas en* $\mathbb{P}(V)$ *se llaman coordenadas Plücker y se denotan por* $p_{i_0,\ldots,i_k}$. *(Los* $p_{i_0,\ldots,i_k}$ *son las coordenadas que corresponden al determinante de la matriz* $(k+1)(k+1)$ *obtenido tomando las columnas* $i_0,\ldots,i_k$*.)*

Ahora, se verifica que φ_{kn} es un embedding de $\mathbb{G}(k,n)$ en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ como subvariedad algebraica. Veamos por qué.

- Para cada conjunto afín abierto $V_{i_0,\ldots,i_k} = \{p_{i_0,\ldots,i_k} \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ se tiene que la siguiente igualdad

$$\varphi_{kn}(\mathbb{G}(k,n)) \bigcap V_{i_0,\ldots,i_k} = \varphi(U_{i_0,\ldots,i_k})$$

  sería suficiente para probar que $\varphi_{kn}|_{U_{i_0,\ldots,i_k}}$ es un embedding algebraico en $V_{i_0,\ldots,i_k}$.

- Trabajaremos con $U_{0,\ldots,k}$. Viene representado por la matriz siguiente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{0k+1} & \ldots & b_{0n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{1k+1} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{kk+1} & \ldots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

  Para esta matriz tenemos que $p_{0,\ldots,k} = 1$ y consideramos el resto de las coordenadas Plücker como las coordenadas en $V_{0,\ldots,k}$. Pero todas las coordenadas de $U_{0,\ldots,k}$ (que son los (b_{ij})) aparecen como coordenadas de φ_{kn}. Más preciso, cada b_{ij} aparece como el menor de la matriz anterior tomando las columnas $0,\ldots,\hat{i},\ldots,k,j$. Esto prueba que φ_{kn} es un embedding.

Veamos ahora si podemos definir $\mathbb{G}(k,n)$ en $\mathbb{P}(\bigwedge^{k+1} V)$ mediante polinomios. Lo veremos en el caso de $\mathbb{G}(1,3)$.

Ejemplo 2.5. *Primero elegimos un sistema de coordenadas en* $\mathbb{P}^3$ *y representamos una recta en* $\mathbb{P}^3$ *mediante la matriz*

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Tiene 6 coordenadas Plücker:

$$\mathbf{p_{01}} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p_{02}} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{10} & a_{12} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p_{03}} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{10} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p_{12}} = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p_{13}} = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{03} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{p_{23}} = \begin{vmatrix} a_{02} & a_{03} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por las dos primeras filas el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

se tiene que la imagen de $\mathbb{G}(k,n)$ *en* $\mathbb{P}^5$ *satisface la siguiente ecuación cuadrática:*

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Ésta es la única ecuación de $\mathbb{G}(1,3)$ *ya que define una variedad irreducible de dimensión 4 que contiene a* $\mathbb{G}(1,3)$ *(que también tiene dimensión 4).*

Analizaremos un poco más a fondo este tema, daremos ecuaciones polinomiales a $\mathbb{G}(1,n)$. Empezamos fijando una base de V y su correspondiente base dual en V^*. Para simplificar la notación denotaremos por $\mathbb{G}$ a $\mathbb{G}(1,n)$. Y consideramos las coordenadas de Plücker $\{p_{ij}\}_{0\leq i\leq j\leq n}$ en $\mathbb{G}$. Podemos ver $\mathbb{G}$ como una subvariedad de $\mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$.

Observación 2.6. *Consideramos* $i \leq j$ *ya que* $p_{ij} = -p_{ji}$ *si* $j \leq i$.

Notación 2.7. *Distinguimos mediante letras mayúsculas o minúsculas a los subespacios de una grassmanniana y a los subconjuntos de* $\mathbb{P}^n$*:*

- $l \in \mathbb{G}(m,n)$ *como elemento de una grassmanniana*

- *$L \subseteq \mathbb{P}^n$ como subconjutno de $\mathbb{P}^n$ que representa el subespacio lineal $m-$dimensional inducido por l y $\vec{l} \subseteq V^*$.*

Notación 2.8.
- *$\mathbb{P}_l^* \subseteq \mathbb{P}^{n*}$ es el sistema lineal de hiperplanos de dimensión $n-2$ que contiene una recta L.*
- *$\vec{\mathbb{P}_l^*} \subseteq V$ es el subespacio lineal $(n-1)$-dimensional que define $\mathbb{P}_l^*$.*

Para cada recta con coordenadas Plücker $\bar{p} = (p_{ij})$ definimos los vectores

$$w_i = (p_{i0}, \dots, p_{in})$$

con $i = 0, \dots, n$ y las formas lineales

$$H_{ijk} = p_{jk}x_i - p_{ik}x_j + p_{ij}x_k$$

con $i, j, k = 0, \dots, n$ donde $x_0, \dots, x_n$ forman un sistema de coordenadas de $\mathbb{P}^n$.

Tenemos que:

- los vectores w_i generan el espacio lineal de $\vec{l} \subseteq V^*$.
- las formas lineales H_{ijk} generan el subespacio lineal de $\vec{\mathbb{P}_l^*} \subseteq V$
- de hecho, las ecuaciones de $\mathbb{G}$ en el espacio de Plücker son $H_{ijk}(w_l) = 0$ para $i, j, k, l = 0, \dots, n$.

Si damos las ecuaciones $H_{ijk}(w_l) = 0$ de forma explícita obtenemos lo que llamaremos *relación de Plücker*

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk} = 0$$

Notación 2.9. *Se tiene que las coordenadas Plücker representadas por p_{ij} son los números en sí, mientras que q_{ij} representan las coordenadas en el espacio en el que está la grassmanianna que vamos a estudiar.*

Observación 2.10. *Sabemos que el espacio $H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}$ está generado por los hiperplanos x_i de $\mathbb{P}^n$ y además se verifica que $x_i \wedge x_j = p_{ij}$.*

3. Módulos

3.1. Definición

Una definición que usaremos al final del trabajo es la siguiente:

Definición 3.1. *Sean A, B , C y D Λ-módulos y sea α, β, γ y δ homomorfismos de Λ-módulos. Decimos que el diagama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\delta"] & D \end{tikzcd}$$

es conmutativo si $\beta \circ \alpha = \delta \circ \alpha : A \to D$

3.2. Producto tensorial

Necesitaremos algunos conceptos sobre productos tensoriales, producto exterior y producto simétrico vistos en [3].

Sean M y N R-módulos. El producto tensorial de M y N sobre R, $M \otimes_R N$, es el $R-$módulo generado por $m \otimes n$ con $m \in M$ y $n \in N$ satisfaciéndose las relaciones

$$rm \otimes n = m \otimes rn$$
$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$
$$m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'$$

para cada $r \in R$.

Estas relaciones muestran precisamente que la aplicación natural

$$\begin{array}{rccc} b: & M \times N & \to & M \otimes N \\ & m \times n & \mapsto & m \otimes n \end{array}$$

es bilineal.

De aquí se sigue que el producto tensorial junto con la aplicación tiene (y se caracteriza por) la siguiente propiedad universal: para cualquier módulo P, las aplicaciones bilineales $M \times N \to P$ tiene una correspondencia $1 - 1$ con el homomorfismo $M \otimes N \to P$ componiendo con la aplicación b. Ésto es,

$$\begin{array}{ccc} Hom(M \otimes_R N, P) & \cong & \{aplicaciones \quad bilineales \quad de \quad M \times N \quad en \quad P\} \\ \varphi & \longrightarrow & \varphi \circ b \end{array}$$

Es elemental que una aplicación bilineal $M \times N \to P$ es igual que un homomorfismo $M \to Hom_R(N, P)$. Así podemos reescribir el isomorfismo natural anterior como el isomorfismo natural siguiente,

$$Hom_R(M \otimes_R N, P) \approx Hom_R(M, Hom_R(N, P))$$

.

El álgebra tensorial de R-módulos M es el álgebra graduada y no conmutativa,

$$T_R(M) := R \oplus M \oplus (M \otimes_R M) \oplus \dots$$

donde el producto de $x_1 \otimes \dots \otimes x_m$ y $y_1 \otimes \dots \otimes y_n$ es:

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_n$$

En el caso más interesante, cuando M es un R-módulo libre en x_i, $T_R(M)$ es simplemente el álgebra libre (no conmutativo) en los x_i. Cuando conocemos el anillo R sobre el que trabajamos podemos escribir $T(M)$.

El álgebra simétrica de M es el álgebra $S_R(M)$ obtenida de $T_R(M)$ imponiendo la ley conmutativa, que es, mediante factorización del ideal bilátero y por la relación $x \otimes y - y \otimes x$ para cada $x, y \in M$. Cuando el contexto es claro podemos escribir simplemente $S(M)$.

Finalmente el álgebra exterior de M es el álgebra $\bigwedge_R(M)$ obtenido de $T_R(M)$ imponiendo la conmuttividad-skew que es, factorizando por el ideal bilátero generado por los elementos $x^2 = x \otimes x$ para cada $x \in M$. (De la fórmula $(x + y) \otimes (x + y) = x \otimes x + x \otimes y + y \otimes x + y \otimes y$ vemos que $x \otimes y + y \otimes x$ va a 0 en $\bigwedge_R M$ para cada $x, y \in M$, entonces $\bigwedge_R M$ tiene realmente la conmutatividad-skew). Cuando el contexto es claro podemos escribir simplemente $\bigwedge(M)$.

Notación 3.2. *Usaremos la siguiente notación:*

- S^iF *representa el producto simétrico i-ésimo de* F
- $\bigwedge^i F$ *representa el producto exterior i-ésimo de* F

3.3. Isomorfismos canónicos entre espacios vectoriales

Supongamos un espacio vectorial V de dimensión n, su espacio dual V^*, W un espacio vectorial de dimensión m y su espacio dual W^*. Veamos en primer lugar que $Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$.

Proposición 3.3. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \longrightarrow & Hom(V,W) \\ f \otimes v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ v & \longmapsto & f(v)w \end{array} \right. \end{array}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Haremos la demostración usando bases. Supongamos que la base de V es $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, su base dual $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, la base de W es $B' = \{a_1, \ldots, a_m\}$ y su dual $B'^* = \{a_1^*, \ldots, a_m^*\}$. Queremos ver que $Hom(V, W) \cong V^* \otimes W$. Las siguientes identificaciones son conocidas,

$Hom(V, W) \equiv Hom(V, (W^*)^*) \equiv Hom(V, Hom(W^*, \mathbb{K})) \equiv Bil(V, W^*; \mathbb{K})$

$V^* \otimes W \equiv V^* \otimes (W^*)^* \equiv (V \otimes W^*)^* \equiv Hom(V \otimes W^*; \mathbb{K})$

Sea $\varphi \in Hom(V, W)$ dado por $\varphi(e_i) = \sum_j \lambda_{ij} a_j$, queremos ver que $\varphi \in V^* \otimes W$ vendría dado por
$\varphi = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i^* \otimes a_j$.

Sea $\varphi \in Hom(V, W)$. Por las identificaciones anteriores se tiene que $\varphi \in Bil(V, W^*; \mathbb{K})$ viene dado por $\varphi(v, f) = \varphi(v)(f) = f(\varphi(v))$. Ahora $\varphi(e_k, a_l^*) = a_l^*(\varphi(e_k)) = a_l^*(\sum_j \lambda_{kj} a_j) = \lambda_{kl}$.

Debemos comprobar que la expresión de φ como elemento de $V^* \otimes W$ coincide con λ_{kl} al evaluarlo en (e_k, a_l^*) y así serán iguales

$\varphi(e_k, a_l^*) = \sum \lambda_{ij} e_i^* \otimes a_j(e_k, a_l^*) = \sum \lambda_{ij} e_i^*(e_k) a_j(a_l^*) = \lambda_{kl}$

Entonces se verifica que $\varphi = \sum \lambda_{ij} e_i^* \otimes a_j$.

□

Proposición 3.4. *La aplicación*

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes \bigwedge^2 V & \longrightarrow & V \\ f \otimes (v \wedge w) & \longmapsto & f(v)w - f(w)v \end{array}$$

es un isomorfismo

Demostración. Usamos la notación y el isomorfismo probado en la Proposición 3.3. Si $W = \bigwedge^2 V$ con $dim V = 2$ entones probar que $V^* \otimes \bigwedge^2 V \cong V$ es equivalente a probar que $V \cong Hom(V, \bigwedge^2 V)$. Como la dimensión de V es 2, entonces $dim \bigwedge^2 V = 1$ y por tanto $Hom(V, \bigwedge^2 V) = 2$. Entonces, para probar el isomorfismo basta probar la inyectividad o la sobreyectividad de la siguiente aplicación,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \longrightarrow & Hom(V, \bigwedge^2 V) \approx V^* \otimes \bigwedge^2 V \\ & v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_v : & V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ & w & \longmapsto & w \wedge v \end{array} \right. \end{array}$$

Lo más sencillo es comprobar la inyectividad: $v \in ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi_v = 0 \Leftrightarrow$ para cada $w \in V, v \wedge w = 0 \Leftrightarrow$ para cada $w \in V, dim < v, w > \leq 1 \Rightarrow v = 0$ porque $dim(V) > 1$. Luego $ker(\varphi) = 0$.

De esta forma tenemos dos isomorfismos:

1.
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & V & \longrightarrow & Hom(V, \bigwedge^2 V) \\ & v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cccc} \varphi_v : & V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ & w & \longmapsto & w \wedge v \end{array} \right. \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rccc} \psi : & V^* \otimes \bigwedge^2 V & \longrightarrow & Hom(V, \bigwedge^2 V) \\ & \phi \otimes w & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ v & \longmapsto & \phi(v)w \end{array} \right. \end{array}$$

Hay que buscar $v \in V$ y $\phi \otimes w \in V^* \otimes \bigwedge^2 V$ tal que $\varphi(v) = \psi(\phi \otimes w)$ Como $dim(V) = 2$, entonces supondremos que $V =< v_1, v_2 >$ y $V^* =< v_1^*, v_2^* >$.

Usando estas bases daremos los isomorfismos anteriores,

1.
$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Hom(V, \bigwedge^2 V) \\ v_1 & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ v_1 & \longmapsto & 0 \\ v_2 & \longmapsto & v_2 \wedge v_1 \end{array} \right. \\ v_2 & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ v_1 & \longmapsto & v_1 \wedge v_2 \\ v_2 & \longmapsto & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes \bigwedge^2 V & \longrightarrow & Hom(V, \bigwedge^2 V) \\ v_1^* \otimes (v_1 \wedge v_2) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ v_1 & \longmapsto & v_1 \wedge v_2 \\ v_2 & \longmapsto & 0 \end{array} \right. \\ v_2^* \otimes (v_1 \wedge v_2) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \bigwedge^2 V \\ v_1 & \longmapsto & 0 \\ v_2 & \longmapsto & v_1 \wedge v_2 \end{array} \right. \end{array}$$

Damos finalmente el isomorfismo que estábamos buscando.

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes \bigwedge^2 V & \longrightarrow & V \\ f \otimes (v \wedge w) & \longmapsto & f(v)w - f(w)v \end{array}$$

Cuando tratamos en particular con las bases de V y V^* tendríamos la siguiente aplicación.

$$\begin{array}{rcl} V^* \otimes \bigwedge^2 V & \longrightarrow & V \\ v_1^* \otimes (v_1 \wedge v_2) & \longmapsto & v_2 \\ v_2^* \otimes (v_1 \wedge v_2) & \longmapsto & -v_1 \end{array}$$

□

3.4. Complejo de Eagon-Northcott

3.4.1. Partiendo de una aplicación de módulos libres finitamente generados

Nos apoyaremos en el apéndice 2.6 de [3].

El complejo de Eagon-Northcott está asociado a una aplicación arbitraria de módulos libres finitamente generados

$$\varphi: \quad F \quad \longrightarrow \quad G$$

sobre un anillo R. Llamamos f al rango de F y g al rango de G. Supondremos que $f \geq g$.

Empezaremos con una reinterpretación del complejo de Koszul. Sea $S = S(G)$ álgebra simétrica en G (es decir, anillo polinomial graduado en un conjunto de generadores libres para G, mirados como elementos de grado 1). Si suponemos que $x_1, \ldots, x_g$ es una base libre de G, entonces $S = R[x_1, \ldots, x_g]$.

Ahora, si llamamos F' al S-módulo siguiente $S \otimes F(-1)$, sabemos que hay una única aplicación de $S-$módulos

$$\varphi': \quad F' \quad \longrightarrow \quad S$$

que manda $F = R \otimes F = (S \otimes F)_0 = F'_1 \subseteq F'$ en $G = S_1 G$ por φ.

En términos de bases tendríamos que,

- si $e_1, \ldots, e_f$ es un conjunto de generadores libres de F, entonces $\varphi e_i = \sum r_{ij} x_j$ donde $r_{ij} \in R$ (viendo $r_{ij} x_j$ como elemento de G).

- si llamamos e'_i al generador $1 \otimes e_i \in F'$, entonces $\varphi' e'_i = \sum r_{ij} x_j$ visto como elemento de $S = R[x_1, \ldots, x_g]$.

Sea

$$K(\varphi'): 0 \longrightarrow \bigwedge^f F' \longrightarrow \bigwedge^{f-1} F' \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigwedge^2 F' \longrightarrow F' \xrightarrow{\varphi'} S$$

el complejos de Koszul determinado por φ' sobre el anillo S. Como las aplicaciones borde de $K(\varphi')$ son homogéneas de grado 0 en el sentido del graduado de S, podemos restringir a un único grado y así llegamos a un complejo de $R-$módulos libres llamados *strand* de $K(\varphi')$.

Explícitamente, en grado d tenemos un complejo

$$K(\varphi')_d : \ldots \xrightarrow{\partial} S_{d-i}G \otimes \bigwedge^{i} F \xrightarrow{\partial} S_{d-i+1}G \otimes \bigwedge^{i-1} F \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} S_{d-1}G \otimes F \xrightarrow{\partial} S_d G$$

donde ∂ representa las diferenciales.

Llamamos $\{\hat{x_i}\}$ a los elementos de la base de G^*, que es la dual de la base $\{x_i\}$ de G. Tenemos que $\varphi^*(\hat{x_i}) \in F^*$ actúa en $\bigwedge F$. Por otro lado la aplicación ∂ toma un elemento $m \otimes f \in S_{d-i}G \otimes \bigwedge^i F$ y lo manda a $\sum x_i m \otimes \varphi^*(\hat{x_i})(f) \in S_{d-i+1}G \otimes \bigwedge^{i-1} F$.

Veamos que $\partial^2 = 0$. Para ello tomaremos el elemento $c = \sum x_i \otimes \hat{x_i} \in G \otimes \ G^*$ que llamamos *elemento traza*. Este elemento es independiente de la base x_i que tomemos. Además se verifica que es la imagen del elemento identidad bajo la aplicación $R \to G \otimes G^*$ (que es dual a la aplicación evaluación $G^* \otimes G \to R$). Las aplicaciones ∂ están dadas por multiplicación por c, visto como un elemento de $S(G) \otimes \bigwedge G^*$ (donde la acción de $\bigwedge G^*$ en $\bigwedge F$ es mediante una aplicación algebraica $\bigwedge \varphi^* : \bigwedge G^* \to \bigwedge F^*$). En particular, como $S(G) \otimes \bigwedge G^*$ es el álgebra exterior sobre SG del $SG-$módulo $SG \otimes G^*$ y c es un elemento de grado 1, se tiene que $c^2 = 0$ y por tanto $\partial^2 = 0$.

Ahora dualizamos $K(\varphi')_d$ tomando $Hom(-, R)$,

$$K(\varphi')_d^* : \ldots \to (S_{d-i+1}G)^* \otimes \bigwedge^{i-1} F^* \to (S_{d-i}G)^* \otimes \bigwedge^{i} F^* \to \ldots$$

Si elegimos un elemento $\alpha \in \bigwedge^f F$ (es posible tomarlo ya que F es libre), podemos usarlo para identificar $\bigwedge^i F^*$ con $\bigwedge^{f-i} F^*$. Por notación, tomamos $D_i G^* \equiv (S_i G)^*$.

Usando estas dos identificaciones reescribimos $K(\varphi')_d^*$,

$$K(\varphi')_d^* : 0 \to D_d G^* \otimes \bigwedge^{f} F \xrightarrow{\delta} D_{d-1}G^* \otimes \bigwedge^{f-1} F \xrightarrow{\delta} \ldots \to D_{d-i}G^* \otimes \bigwedge^{f-i} F$$

$$\xrightarrow{\delta} D_{d-i-1}G^* \otimes \bigwedge^{f-i-1} F \xrightarrow{\delta} \ldots$$

Como DG^* es un módulo sobre SG, la aplicación δ puede ser descrita como multiplicación por $c \in G \otimes G^* \subseteq SG \otimes \bigwedge G^*$.

Para conseguir el complejo de Eagon-Northcott nos centraremos en un tipo de complejo creado mediante la unión de los complejos de la forma $K(\varphi')_d^*$ y $K(\varphi')_{f-g-d}$ en el caso de que $d \leq f - g$. Así tendremos que:

- el último término por la derecha de $K(\varphi')^*_d$ es $D_0G^* \otimes \bigwedge^{f-d} F$ que lo podemos identificar con $\bigwedge^{f-d} F$ ya que $D_0G^* \equiv R$.

- el primer término por la izquierda de $K(\varphi')_{f-g-d}$ es $\bigwedge^{f-g-d} F$.

Definimos una aplicación para unir los dos complejos

$$\epsilon : \bigwedge^{f-d} F \longrightarrow \bigwedge^{f-d-g} F$$

Llamamos $\mathcal{C}^i$ al complejo obtenido uniendo $K(\varphi')^*_{f-g-i}$ con $K(\varphi')_i$ mediante la aplicación ϵ definida antes. Cuando $i = 0$ obtenemos el complejo de Eagon-Northcott.

Detallamaos un poco más la aplicación ϵ antes de dar el complejo de Eagon-Northcott. Definimos ϵ en términos de un generador $\gamma \in \bigwedge^g G^* \cong R$ (podemos tomar γ ya que hemos asumido que G es libre). Tomado γ definimos para cualquier $k \geq g$ la aplicación

$$\epsilon : \bigwedge^k F \longrightarrow \bigwedge^{k-g} F$$

que es la acción de $\bigwedge^g \varphi^*\gamma$ en F. Traducimos en términos de bases. Si tomamos I un subconjunto $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ de $\{1, \ldots, f\}$ y $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ producto correspondiente, entonces

$$\epsilon(e_I) = \sum_{J \subset I, |J|=g} sgn(J \subset I)(det(\varphi J))e_{I-J}$$

donde:

- $sgn(J \subset I)$ es el signo de la permutación de I que pone elementos de J en las primeras g posiciones.

- φJ es la submatriz $g \times g$ de φ cuyas columnas corresponden a los elementos de la base con índices en J.

- e_{I-J} es el producto wedge de vectores de la base cuyos índices están en el conjunto $I - J$.

En el caso de que tomamos $k = g$ tendríamos la aplicación

$$\epsilon : \bigwedge^g F \longrightarrow \bigwedge^0 F = R$$

que lo podemos identificar con la composición siguiente

$$\bigwedge^g F \xrightarrow{\wedge^g \varphi} \bigwedge^g G \cong R$$

Ya tenemos todos los datos para escribir el complejo de Eagon-Northcott. Usaremos las siguientes identificaciones para simplificar un poco las expresiones

- $S_d := S_d G$
- $D_d := D_d G^* = (S_d G)^*$
- $\bigwedge^d := \bigwedge^d F$
- $D_0 = S_0 = \bigwedge^0 = R$

Pensaremos en $\epsilon : \bigwedge^k F \to \bigwedge^{k-g} F$ como la aplicación que va de $D_0 G^* \otimes \bigwedge^k F$ en $\bigwedge^{k-g} F$.

Escribiremos también:

- G como $D_1 = D_1 G^*$
- G^* como $S_1 = S_1 G$
- F como $\bigwedge^1 = \bigwedge^1 F$

Primero escribiremos $K(\varphi')^*_{f-g}$, $K(\varphi')_0$ y la apliucación ϵ y luego escribiremos $\mathcal{C}^0$ (con la notación anterior tenemos que sustituir d por $f-g$ e i por 0).

- $K(\varphi')^*_{f-g} : 0 \to D_{f-g}G^* \otimes \bigwedge^f F \xrightarrow{\delta} D_{f-g-1}G^* \otimes \bigwedge^{f-1} F \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} D_{f-g-i}G^* \otimes \bigwedge^{f-i} F \xrightarrow{\delta} D_{f-g-i-1}G^* \otimes \bigwedge^{f-i-1} F \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} D_1 G^* \otimes \bigwedge^{f-(f-g-1)} F \xrightarrow{\delta} D_0 G^* \otimes \bigwedge^g F = \bigwedge^g F$
- $K(\varphi')_0 : S_0 G = R$
- $\epsilon : \bigwedge^{f-(f-g)} F \to \bigwedge^{f-g-(f-g)} F = R \cong \bigwedge^g G$

Uniendo los tres trozos anteriores obtenemos $\mathcal{C}^0$

- $\mathcal{C}^0 : 0 \to D_{f-g}G^* \otimes \bigwedge^f F \xrightarrow{\delta} D_{f-g-1}G^* \otimes \bigwedge^{f-1} F \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} D_{f-g-i}G^* \otimes \bigwedge^{f-i} F \xrightarrow{\delta} D_{f-g-i-1}G^* \otimes \bigwedge^{f-i-1} F \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} D_1 G^* \otimes \bigwedge^{g+1} F \xrightarrow{\delta} \bigwedge^g F \xrightarrow{\epsilon} R \cong \bigwedge^g G$

Reescribimos usando las identificaciones dadas antes y así obtenemos el complejo de Eagon-Northcott

$$\mathcal{C}^0 : 0 \to D_{f-g} \otimes \bigwedge^{f} \xrightarrow{\delta} D_{f-g-1} \otimes \bigwedge^{f-1} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} G^* \otimes \bigwedge^{g+1} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{g} \xrightarrow{\epsilon} R \cong \bigwedge^{g} G$$

3.4.2. Partiendo de una sucesión exacta

Queremos probar el complejo de Eagon-Northcott de otra forma. En vez de partir de una aplicación entre módulos libres partiremos de la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow V'' \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\varphi} V' \longrightarrow 0$$

donde V, V' y V'' son espacios vectoriales y $dimV'' = 2$.

Nuestro objetivo ahora es probar que:

$$0 \longrightarrow \bigwedge^2 V'' \longrightarrow \bigwedge^2 V \longrightarrow V' \otimes V \longrightarrow S^2 V' \longrightarrow 0$$

es exacta. Para ello pasamos a los espacios duales teniendo así:

- $$0 \longrightarrow V'' \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0$$
  es exacta si y sólo si
  $$0 \longrightarrow V'^* \longrightarrow V^* \longrightarrow V''^* \longrightarrow 0$$
  es exacta

- $$0 \longrightarrow \bigwedge^2 V'' \longrightarrow \bigwedge^2 V \longrightarrow V' \otimes V \longrightarrow S^2 V' \longrightarrow 0$$
  es exacta si y sólo si
  $$0 \longrightarrow S^2 V'^* \longrightarrow V'^* \otimes V^* \longrightarrow \bigwedge^2 V^* \longrightarrow \bigwedge^2 V''^* \longrightarrow 0$$
  es exacta

Nuestro obejtivo es probar que la última sucesión es exacta. Ahora:

- $S^2 V'^* = Sim(V', V') = \{\gamma : V' \times V' \to \mathbb{K}, \gamma(v, w) = \gamma(w, v),\ \gamma$ es simétrica$\}$
- $V'^* \otimes V^* = Bil(V', V) = \{\delta : V' \times V \to \mathbb{K},\ \delta$ es bilineal$\}$
- $\bigwedge^2 V^* = Ant(V, V) = \{\alpha : V \times V \to \mathbb{K}, \alpha(v, w) = -\alpha(w, v),\ \alpha$ es antisimétrica$\}$
- $\bigwedge^2 V''^* = Ant(V'', V'') = \{\sigma : V'' \times V'' \to \mathbb{K}, \sigma(v, w) = -\sigma(w, v),\ \sigma$ es antisimétrica$\}$

Entonces queremos ver si:

$$0 \longrightarrow Sim(V',V') \xrightarrow{A} Bil(V',V) \xrightarrow{B} Ant(V,V) \xrightarrow{C} Ant(V'',V'') \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sabemos que:

- φ es sobreyectiva
- $Im(\beta) = ker(\varphi)$
- β es inyectiva

Queremos probar que:

1. $Im(A) = ker(B)$
2. $Im(B) = ker(C)$
3. C es sobreyectiva
4. A es inyectiva

Veamos como definimos las aplicaciones A, B y C

- Definimos A:

$$\begin{tikzcd} V' \times V' \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{K} \\ V' \times V \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} Sim(V',V') & \xrightarrow{A} & Bil(V',V) \\ \gamma & \longmapsto & \delta = \gamma \circ a \end{array}$$

donde tenemos que:

- γ es simétrica
- $a(v',v) = (v',\varphi(v))$
- y por tanto $\delta(v',v) = \gamma(v',\varphi(v))$

Por como hemos definido δ sabemos que es bilineal ya que γ es bilineal simétrica.

- Definimos B:

$$\begin{tikzcd} V' \times V \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{K} \\ V \times V \arrow[u, "b"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} Bil(V',V) & \xrightarrow{B} & Ant(V,V) \\ \delta & \longmapsto & \alpha = \delta \circ b \end{array}$$

  donde tenemos que:

  - δ es bilineal
  - $b(v,w) = (\varphi(v), w) - (\varphi(w), v)$
  - y por tanto $\alpha(v,w) = \delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w)), v)$

  Por como hemos definido α se verifica que es bilineal antisimétrica ya que δ es bilineal y $\alpha(v,w) = -\alpha(w,v)$.

- Definimos C:

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{K} \\ V'' \times V'' \arrow[u, "c"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} Ant(V,V) & \xrightarrow{C} & Ant(V'',V'') \\ \alpha & \longmapsto & \sigma = \alpha \circ c \end{array}$$

  donde tenemos que:

  - α es antisimétrica
  - $c(v'', w'') = (\beta(v''), \beta(w''))$
  - y por tanto $\sigma(v'', w'') = \alpha(\beta(v''), \beta(w''))$

  Por como hemos definido σ se verifica que es bilineal antisimétrica ya que α lo es.

A continuación analizaremos la exactitud de la sucesión.

1. $Im(A) = ker(B)$: Tenemos que

- $Im(A) = \{\delta \in Bil(V', V)$ tal que existe $\gamma \in Sim(V'.V')$ con $\delta = A(\gamma)\} = \{\delta \in Bil(V', V)$ tal que existe $\gamma \in Sim(V'.V')$ con $\delta(v', v) = \gamma(v', \varphi(v))$ para cada $v' \in V'$, $v \in V\}$
- $ker(B) = \{\delta \in Bil(V', V)$ tal que $B(\delta) = 0\} = \{\delta \in Bil(V', V)$ tal que $\alpha(v, w) = 0$ para cada $v, w \in V\} = \{\delta \in Bil(V', V)$ tal que $\delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v) = 0$ para cada $v, w \in V\}$
- Veamos que $Im(A) \subseteq ker(B)$.

  Sea $\delta \in Im(A)$, entonces tenemos que existe $\gamma \in Sim(V', V)$ tal que $\delta(v'.v) = \gamma(v', \varphi(v))$ para cada $v' \in V'$ y $v \in V$.

  ¿$\delta \in ker(B)$? ¿$\delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v)$? Por definición tenemos que:

$$\delta(\varphi(v), w) = \gamma(\varphi(v), \varphi(w))$$

$$\delta(\varphi(w), v) = \gamma(\varphi(w), \varphi(v))$$

  Como γ es simétrica entonces $\gamma(\varphi(v), \varphi(w)) = \gamma(\varphi(w), \varphi(v))$ y por tanto $\delta(\varphi(v), w) = \delta(\varphi(w), v)$. Luego $\delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v) = 0$ y así $\delta \in ker(B)$.
- Veamos que $ker(B) \subseteq Im(A)$.

  Sea $\delta \in ker(B)$, entonces $\delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v) = 0$ para cada $v, w \in V$.

  ¿$\delta \in Im(A)$? ¿Existe $\delta \in Sim(V', V)$ tal que $\delta(v', v) = \gamma(v', \varphi(v))$ para cada $v' \in V'$ y $v \in V$?

  Debemos construir γ simétrica tal que $\delta(v', v) = \gamma(v', \varphi(v))$ para cada $v' \in V'$ y $v \in V$, sabiendo que $\delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v) = 0$ para cada $v, w \in V$.

  Sea $B' = \{w'_1, \ldots, w'_r\}$ una base de V' y $B = \{w_1, \ldots, w_r\}$ conjunto de elementos de V tal que $\varphi(w_i) = w'_i$.

  Definimos la aplicación ψ que manda los elementos de B' en los elementos de B.

$$\begin{array}{cccc} \psi: & V' & \longrightarrow & V \\ & w'_i & \longmapsto & w_i \end{array}$$

  Esta aplicación está bien definida. Usando ψ definimos la aplicación γ como sigue:

$$\begin{array}{cccc} \gamma: & V' \times V' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v'_1, v'_2) & \longmapsto & \delta(v'_1, \psi(v'_2)) \end{array}$$

γ está bien definida por como la hemos definido. Faltaría probar que es simétrica ¿$\gamma(v'_1, v'_2) = \gamma(v'_2, v'_1)$?. Evaluamos las dos partes de la igualdad que queremos probar,

$$\gamma(v'_1, v'_2) = \delta(v'_1, \varphi(v'_2))$$

$$\gamma(v'_2, v'_1) = \delta(v'_2, \varphi(v'_1))$$

Pero como $\delta \in ker(B)$ se tiene que:

$$\delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v) = 0$$

para cada $v, w \in V$. Entonces:

$$\gamma(v'_1, v'_2) = \delta(v'_1, \psi(v'_2)) = \delta(\varphi(\psi(v'_1)), \psi(v'_2))$$

$$\gamma(v'_2, v'_1) = \delta(v'_2, \psi(v'_1)) = \delta(\varphi(\psi(v'_1)), \psi(v'_2))$$

Luego γ es simétrica.

2. $Im(B) = ker(C)$ Tenemos que:

- $Im(B) = \{\alpha \in Ant(V, V)$ tal que existe $\delta \in Bil(V'.V)$ con $\alpha = B(\delta)\} = \{\alpha \in Ant(V, V)$ tal que existe $\delta \in Bil(V'.V')$ con $\alpha(v, w) = \delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v)$ para cada $v, w \in V\}$.
- $ker(C) = \{\alpha \in Ant(V, V)$ tal que $C(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in Ant(V, V)$ tal que $\alpha(\beta(v''), \beta(w'')) = 0$ para cada $v'', w'' \in V''\}$.
- Veamos que $Im(B) \subseteq ker(C)$.

  Sea $\alpha \in Im(A)$, entonces existe $\delta \in Bil(V', V)$ tal que

  $$\alpha(v.w) = \delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v)$$

  para cada $v, w \in V$.

  ¿$\alpha \in ker(C)$? ¿$\alpha(\beta(v''), \beta(w'')) = 0$ para cada $v'', w'' \in V''$? Por definición tenemos que:

  $$\alpha(\beta(v''), \beta(w'')) = \delta(\varphi(\beta(v'')), \beta(w'')) - \delta(\varphi(\beta(w'')), \beta(v''))$$

  Ahora usamos que $Im(\beta) = ker(\varphi)$, esto quiere decir que

  $$\varphi(\beta(v'')) = 0$$

  para $v'' \in V''$. Luego

  $$\alpha(\beta(v''), \beta(w'')) = \delta(0, \beta(w'')) - \delta(0, \beta(v'')) = 0 - 0 = 0$$

  Por tanto $\alpha \in ker(C)$.

- Veamos que $ker(C) \subseteq Im(B)$.
  Sea $\alpha \in ker(C)$, entonces

$$\alpha(\beta(v''), \beta(w'')) = 0$$

para cada $v'', w'' \in ker(V'')$.
¿$\alpha \in Im(B)$? ¿Existe $\delta \in Bil(V', V)$ tal que

$$\alpha(v, w) = \delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v)$$

para cada $v, w \in V$? Debemos construir una aplicación $\delta \in Bil(V', V)$ tal que

$$\alpha(v, w) = \delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v)$$

para cada $v, w \in V$ sabiendo que

$$\alpha(\beta(v''), \beta(w'')) = 0$$

para cada $v'', w'' \in ker(V'')$.
Para definir δ usamos la base $B' = \{w'_1, \ldots, w'_r\}$ de V', el conjunto $B = \{w_1, \ldots, w_r\}$ de elementos de V tal que $\varphi(w_i) = w'_i$ y la aplicación ψ

$$\begin{array}{rccc} \psi: & V' & \longrightarrow & V \\ & w'_i & \longmapsto & w'_i \end{array}$$

Se verifica que $\varphi \circ \psi = Id$ pero $\psi \circ \varphi \neq Id$
Además,

$$v - \psi(\varphi(v)) \in Ker(\varphi) = Im(\beta) \Rightarrow v - \psi(\varphi(v)) = \beta(v'')$$

para algún $v'' \in V''$.
Usando ésto definimos δ como sigue:

$$\begin{array}{rccl} \delta: & V' \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (v', w) & \longmapsto & \frac{1}{2}\alpha(\psi(v'), w) + \frac{1}{2}\alpha(\beta(v''), \psi(\varphi(w))) = \\ & & & \frac{1}{2}\alpha(\psi(v'), w) - \frac{1}{2}\alpha(\beta(v''), w) \end{array}$$

Es una aplicación bien definida.
Veamos que $\varphi(v, w) = \delta(\varphi(v), w) - \delta(\varphi(w), v)$ para cada $v, w \in V$.

a)

$$\delta(\varphi(v), w) = \frac{1}{2}\alpha(\psi(\varphi(v)), w) + \frac{1}{2}\alpha(\beta(v''), \psi(\varphi(w))) =$$

$$\frac{1}{2}\alpha(v-\beta(v''),w)+\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w)))=\frac{1}{2}\alpha(v,w)-$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),w)+\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w)))$$

b)

$$\delta(\varphi(w),v)=\frac{1}{2}\alpha(\psi(\varphi(w)),v)+\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))=$$

$$\frac{1}{2}\alpha(w-\beta(w''),v)+\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))=\frac{1}{2}\alpha(w,v)-$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),v)+\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))$$

c)

$$\delta(\varphi(v),w)-\delta(\varphi(w),v)=\frac{1}{2}\alpha(v,w)-\frac{1}{2}\alpha(w,v)-\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),w)+$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),v)+\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w)))-\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))=$$

$$\alpha(v,w)-\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w))+\beta(w''))+\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v))+\beta(v''))+$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w)))-\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))=\alpha(v,w)-\frac{1}{2}\overbrace{\alpha(\beta(v''),\beta(w''))}^{0}-$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w)))+\frac{1}{2}\alpha\overbrace{(\beta(w''),\beta(v''))}^{0}+\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))+$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\beta(v''),\psi(\varphi(w)))-\frac{1}{2}\alpha(\beta(w''),\psi(\varphi(v)))=\alpha(v,w)$$

3. C es sobreyectiva.

   C sería sobreyectiva si para cada $\sigma\in Ant(V'',V'')$ existe $\alpha\in Ant(V,V)$ tal que $\sigma=C(\alpha)$, es decir,

   ¿para cada $\sigma\in Ant(V'',V'')$ existe $\alpha\in Ant(V,V)$ tal que

$$\sigma(v'',w'')=\alpha(\beta(v''),\beta(w''))$$

   para cada $v'',w''\in V''$?

Debemos construir la aplicación $\alpha \in Ant(V, V)$ que verifique la igualdad anterior. Como β es inyectiva, entonces podemos poner V como suma directa de $\beta(V'')$ y un espacio complementario.

$$V = \beta(V'') \oplus W$$

Definimos

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (\beta(v_1'') + w_1, \beta(v_2'') + w_2) & \longmapsto & \sigma(v_1'', v_2'') \end{array}$$

Debemos probar que α está bien definida y que verifica que

$$\sigma(v'', w'') = \alpha(\beta(v''), \beta(w''))$$

- ¿α está bien definida?

  Sabemos que α está bien definido ya que si tomamos

  $$v_1 = \beta(v_1'') + \tilde{w}_1$$

  $$v_1 = \beta(v_1'') + \tilde{w}_1$$

  y

  $$v_2 = \beta(v_2'') + \tilde{w}_2$$

  $$v_2 = \beta(v_2'') + \tilde{w}_2$$

  entonces $\alpha(v_1, v_2) = \sigma(v_1'', v_2'')$ es independiente de la elección de los elementos de W que hagamos.

- ¿$\sigma(v'', w'') = \alpha(\beta(v''), \beta(w''))$?

  La igualdad anterior se verifica por como hemos definido α.

4. A es inyectiva

   Para probar que A es inyectica debemos ver que si $A(\gamma) = 0$ entonces $\gamma = 0$. Es decir,

   ¿$\gamma(v_1', \varphi(v_2)) = 0$ para cada $v_1' \in V'$,$v_2 \in V \Rightarrow \gamma(v_1', v_2') = 0$ para cada $v_1', v_2' \in V'$?

   Como φ es sobreyectiva entonces para cada $v_2' \in V'$ existe $v_2 \in V$ tal que $\varphi(v_2) = v_2'$. Y como $\gamma(v_1', \varphi(v_2)) = 0$ entonces se tiene que $\gamma = 0$.

Ahora daremos las aplicaciones A, B y C de forma tensorial. Usaremos la notación siguiente:

$$\begin{array}{rrcl} \varphi^*: & V'^* & \longrightarrow & V^* \\ & \alpha' & \longmapsto & \alpha' \circ \varphi \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "\alpha'"] & \mathbb{K} \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\alpha' \circ \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rrcl} \beta^*: & V^* & \longrightarrow & V''^* \\ & \lambda & \longmapsto & \lambda \circ \beta \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{K} \\ V'' \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\lambda \circ \beta"'] & \end{tikzcd}$$

- Aplicación A: Queremos dar la aplicación $S^2 V'^* \to V'^* \otimes V^*$.

  La aplicación que correspondería con $Sim(V', V')$ sería,

  $$\begin{array}{rcl} V' \times V' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v'_1, v'_2) & \longmapsto & \alpha'_1(v'_1)\alpha'_2(v'_2) + \alpha'_1(v'_2)\alpha'_2(v'_1) \end{array}$$

  y la que correspondería con $Bil(V', V)$ sería

  $$\begin{array}{rcl} V' \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v', v) & \longmapsto & \alpha'_1(v')\alpha'_2(\varphi(v)) = \alpha'_1(v')(\varphi^*(\alpha'_2))(v) \end{array}$$

  Entonces tendríamos que:

  $$\begin{array}{rcl} S^2 V'^* & \longrightarrow & V'^* \otimes V^* \\ (\alpha'_1, \alpha'_2) & \longmapsto & \alpha'_1 \otimes \varphi^*(\alpha'_2) + \alpha'_2 \otimes \varphi^*(\alpha'_1) \end{array}$$

- Aplicación B: Queremos dar la aplicación $V'^* \otimes V^* \to \bigwedge^2 V^*$.

  Repetimos el procedimiento anterior. Así la aplicación en $Bil(V', V)$ sería,

  $$\begin{array}{rcl} V' \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v', v) & \longmapsto & \alpha'(v')\lambda(v) \end{array}$$

y la aplicación en $Ant(V, V)$ sería,

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \alpha' \circ \varphi(v_1)\lambda(v_2) - \alpha' \circ \varphi(v_2)\lambda(v_1) \end{array}$$

Así tendríamos que:

$$\begin{array}{rcl} V'^{*} \otimes V^{*} & \longrightarrow & \bigwedge^2 V^{*} \\ (\alpha', \lambda) & \longmapsto & \varphi^{*}(\alpha') \wedge \lambda \end{array}$$

- Aplicación C: Queremos dar la aplicación $\bigwedge^2 V^{*} \to \bigwedge^2 V''^{*}$.

  La aplicación en $Ant(V, V)$ sería,

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & \lambda_1(v_1)\lambda_2(v_2) - \lambda_1(v_2)\lambda_2(v_1) \end{array}$$

  y la aplicación en $Ant(V'', V'')$ sería,

$$\begin{array}{rcl} V'' \times V'' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1'', v_2'') & \longmapsto & \underbrace{\lambda_1(\beta(v_1))}_{\beta^{*}(\lambda_1(v_1''))}\lambda_2(\beta(v_2)) - \lambda_1(\beta(v_2))\lambda_2(\beta(v_1)) \end{array}$$

  Así tendríamos que:

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge^2 V^{*} & \longrightarrow & \bigwedge^2 V''^{*} \\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 & \longmapsto & \beta^{*}(\lambda_1) \wedge \beta^{*}(\lambda_2) \end{array}$$

3.5. Lema de la serpiente

La notación que usaremos es la siguiente:

- $\bar{h}$ denota la aplicación inducida por h.
- $\bar{x}$ denota la clase de equivalencia de ese elemento.

A continuación enunciaremos y demostraremos el lema.

Lema 3.5. *Sea R un anillo conmutativo con unidad. Dado un diagrama conmutativo de R-módulos con filas exactas:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"] & N \arrow[r, "\psi"] & N'' & \\ & M' \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[u, "f''"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe una aplicación δ en el diagrama inducido siguiente

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & coker(f') \arrow[u] \arrow[r, "\bar{h}"] & coker(f) \arrow[u] \arrow[r, "\bar{\psi}"] & coker(f'') \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[u, "\pi_{f'}"'] \arrow[r, "h"] & N \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[r, "\psi"] & N'' \arrow[u, "\pi_{f''}"'] & \\
 & M' \arrow[u, "f'"'] \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[u, "f''"'] \arrow[r] & 0 \\
 & ker(f') \arrow[u, "i_{f'}"'] \arrow[r, "\bar{\phi}"] & ker(f) \arrow[u, "i_f"'] \arrow[r, "\bar{g}"] & ker(f'') \arrow[u, "i_{f''}"'] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

donde i es la aplicación inclusión canónica, π es la aplicación proyección canónica y $\delta : ker(f'') \to coker(f')$ es tal que la sucesión siguiente es exacta

$$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'') \xrightarrow{\delta} coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$

y cualquier sección del diagrama es conmutativo.

Demostración. Lo probaremos por partes: Debemos demostrar que:

1. La sucesión

   $$0 \longrightarrow ker(f) \xrightarrow{i_f} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi_f} coker(f) \longrightarrow 0$$

   es exacta.

2. Las aplicaciones $\bar{\phi}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ y $\bar{\psi}$ están bien definidas y por tanto el diagrama entero conmuta.

3. La sucesión

   $$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'')$$

   es exacta.

4. La sucesión
$$coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$
es exacta

5. Por último definiremos $\delta : ker(f'') \to coker(f')$ para que la sucesión
$$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'') \xrightarrow{\delta} coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$
sea exacta.

Empezaremos a probar cada uno de los apartados.

1. *La sucesión*
$$0 \longrightarrow ker(f) \xrightarrow{i_f} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi_f} coker(f) \longrightarrow 0$$
es exacta.

   Como i_f es la aplicación inclusión, es canónicamente inyectiva. Como π_f es la aplicación proyección, es canónicamente sobreyectiva. Por definición de $ker(f)$ se tiene que $f \circ i_f = 0$, luego $Im(i_f) \subseteq ker(f)$. Por definición de $coker(f)$ se tiene que $\pi_f \circ f = 0$, luego $Im(f) \subseteq ker(\pi_f)$. Además también tenemos por definición que $ker(f) \subseteq Im(i_f)$ y $ker(\pi_f) \subseteq Im(f)$. Así tenemos que todas las columnas del diagrama son exactas.

2. *Las aplicaciones $\bar{\phi}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ y $\bar{\psi}$ están bien definidas y por tanto el diagrama entero conmuta.*

   - Veámoslo para $\bar{\phi}$. Sean $a = b$ en $ker(f')$, es decir, $a - b = 0$ en $ker(f')$. Ahora, $i_{f'}$ es inyectiva, entonces $i_{f'}(a-b) = 0 \in M'$. Como ϕ está bien definida, entonces $\phi \circ i_{f'}(a-b) = 0 = i_f(0)$. Entonces $\bar{\phi}$ manda $a - b = 0$ a 0 en $ker(f)$ y por tanto $\bar{\phi}$ está bien definida ($\bar{\phi}(a) = \bar{\phi}(b)$). Así el diagrama inferior izquierdo conmuta.
     De forma análoga se prueba que $\bar{g}$ está bien definido y que el diagrama inferior derecho conmuta.
   - Veámoslo para $\bar{h}$. Sea $\bar{a} = \bar{b}$ en $coker(f')$. Como $\pi_{f'}$ es suprayectiva, se tiene que $\bar{a} - \bar{b} = \bar{0} = \pi_{f'}(a' - b')$ para $a', b' \in N'$. Entonces $\bar{h}$ manda $\bar{a} - \bar{b} = \bar{0}$ a 0 en $coker(f)$, luego $\bar{h}$ está bien definida ($\bar{h}(a) = \bar{h}(b)$) y así el diagrama superior izquierdo conmuta.
     De forma análoga se prueba que $\bar{\phi}$ está bien definida y que el diagrama superior derecho conmuta.

3. *La sucesión*

$$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'')$$

es exacta.

- Veamos que $Im(\bar{\phi}) \subseteq ker(\bar{g})$. Queremos ver que $\bar{g} \circ \bar{\phi} = 0$. Sea $a \in ker(f')$, por conmutatividad, $i_f \circ \bar{\phi}(a) = \phi \circ i_{f'}(a)$. Aplicando g obtenemos 0 por la exactitud de la sucesión

$$M' \to M \to M'' \to 0 \tag{1}$$

  Entonces $g \circ i_f \circ \bar{\phi}(a) = 0$. Ahora, $i_{f''}$ es inyectiva y por la conmutatividad del diagrama se tiene que $\bar{g} \circ \bar{\phi} = 0$

- Veamos que $ker(\bar{g}) \subseteq Im(\bar{\phi})$. Sea $b \in ker(\bar{g})$, entonces $\bar{g}(b) = 0 \in ker(f'')$. Como $i_{f''}$ es inyectiva, entonces $i_{f''} \circ \bar{g}(b) = 0 \in M''$. Por la conmutatividad del diagrama, $g \circ i_f(b) = 0$, entonces $i_f(b) \in ker(g) = Im(\phi)$ por la exactitud de la sucesión (1). Por tanto $i_f(b) = \phi(c)$ para algún $c \in M'$. Ahora, $i_{f'}$ es inyectiva, entonces podemos subir c a algún $d \in ker(f')$ donde $\bar{\phi}(d) = b$ por conmutatividad del diagrama.

4. *La sucesión*

$$coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$

es exacta.

- Veamos que $Im(\bar{h}) \subseteq ker(\bar{\psi})$. Queremos ver que $\bar{\psi} \circ \bar{h} = 0$. Sea $\bar{a} \in coker(f')$. Como $\pi_{f'}$ es sobreyectiva, entonces $\bar{a} = \pi_{f'}(b)$ para algún $b \in N'$. Como la sucesión

$$0 \to N' \to N \to N'' \tag{2}$$

  es exacta, se tiene que $\psi \circ h = 0$, entonces $\psi \circ h(b) = 0$, lo que significa que $\pi_{f''}(\psi \circ h(b)) = \bar{0}$ en $coker(f'')$. Entonces $\bar{\psi} \circ \bar{h}(\bar{a}) = \bar{0}$ por la conmutatividad del diagrama y por tanto $\bar{\psi} \circ \bar{h} = 0$.

- Veamos que $ker(\bar{\psi}) \subseteq Im(\bar{h})$. Sea $\bar{a} \in ker(\bar{\psi}) \subseteq coker(f)$, entonces $\bar{a} = \pi_f(b)$ para algún $b \in N$ por la sobreyectividad de π_f. Por la conmutatividad del diagrama $\psi(b) = 0$. Por ser (2) exacta se tiene que $b \in ker(\psi) = Im(h)$, luego $h(c) = b$ para algún $c \in N'$. Por conmutatividad del diagrama se tiene que $\bar{a} \in Im(\bar{h})$.

5. *Por último definiremos $\delta : ker(f'') \to coker(f')$ para que la sucesión*

$$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'') \xrightarrow{\delta} coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$

sea exacta.

- Sea $z \in ker(f'') \subseteq M''$. Como g es sobreyectiva, tenemos que $g(y) = z$ para algún $y \in M$. Entonces $f(y) \in N$ y $\psi(f(y)) = 0$ por la conmutatividad y la definición de z. Por exactitud de (2) tenemos que $f(y) = h(x)$ para algún $x \in N'$. Definimos $\delta(z) = \bar{x} \in coker(f')$.
- Veamos que δ está bien definida. Supongamos ahora $y' \in M$ con $g(y') = i_{f''}(z)$, entonces $y - y' \in ker(g) = Im(\phi)$. Por tanto $y - y' = \phi(a)$ para algún $a \in M'$. Entonces $f(y - y') = h \circ f'(a)$ por conmutatividad. Por como hemos definido δ tenemos que $f(y) = h(x)$ y $f(y') = h(x')$ para algún $x, x' \in N'$, luego $f(y-y') = (h \circ f')(a) = h(x-x')$. Ésto significa que $x - x' - f'(a) \in ker(h)$. Ahora, h es inyectiva y por la exactitud de (2) tenemos que $x - x' - f'(a) = 0$, luego $x - x' = f'(a)$. Aplicando $\pi_{f'}$ se tiene que $\overline{x - x'} = \bar{0}$ y por tanto $\bar{x} = \bar{x'}$. Luego δ es una aplicación bien definida.
- Veamos ahora que δ es un homomorfismo (aplicación $R-$lineal). Tomamos $ra + sb \in ker(f'') \subseteq M''$ donde $r, s \in R$ y $a, b \in M''$. Como g es sobreyectiva, se tiene que existe $rc + sd \in M$ tal que $g(rc + sd) = ra + sb$ o equivalentemente $rg(c) + sg(d) = ra + sb$. Entonces $f(rc+sd) \in N$ y $\psi(f(rc+sd)) = 0$ por conmutatividad y la definición de núcleo. Por exactitud ($Im(h) = her(\psi)$) y usando que f es $R-$lineal, tenemos que

  $$f(rc + sd) = rf(c) + sf(d) = rh(j) + sh(k) = h(rj + sk)$$

  para algún $j, k \in N'$. Luego, $\delta(ra + sb) = \overline{rj + sk}$. Repetimos el argumento, pero esta vez partiendo de $ra \in ker(f'') \subseteq M''$ y $sb \in ker(f'') \subseteq M''$. Así tenemos que:

  $$\delta(ra) = \overline{rj} = r\bar{j} \text{ y } \delta(sb) = \overline{sk} = s\bar{k}$$

  Así concluimos que δ es $R-$lineal.
- Nos falta ver que ls sucesión

$$ker(f') \xrightarrow{\bar{\phi}} ker(f) \xrightarrow{\bar{g}} ker(f'') \xrightarrow{\delta} coker(f') \xrightarrow{\bar{h}} coker(f) \xrightarrow{\bar{\psi}} coker(f'')$$

es exacta.

Para ello debemos ver que $Im(\bar{g}) = ker(\delta)$ y $Im(\delta) = ker(\bar{h})$.

- Veamos que $Im(\bar{g}) \subseteq ker(\delta)$. Queremos ver que $\delta \circ \bar{g} = 0$. Sea $y \in ker(f)$, entonces $\delta(\bar{g}(y)) = 0$ por la definición de δ.
- Veamos que $ker(\delta) \subseteq Im(\bar{g})$. Sea $z \in ker(\delta)$, entonces $\delta(z) = \bar{0}$ en $coker(f')$. Existe $x \in Im(f')$ tal que $\pi_{f'}(x) = \bar{0}$ por ser $\pi_{f'}$ sobreyectiva. Entonces $x = f'(a)$ para algún $a \in M'$, entonces $(h \circ f')(a) = (f \circ \phi)(a)$, luego $h(x) = (f \circ \phi)(a)$. Pero por definición de δ, $h(x) = f(y)$ para algún $y \in M$. Entonces $z = g(y - \phi(a) + \phi(a)) = g(y - \phi(a)) + g \circ \phi(a) = g(y - \phi(a)) \in Im(\bar{g})$. Luego $z \in Im(\bar{g})$.
- Veamos que $Im(\delta) \subseteq ker(\bar{h})$. Sea $\delta(z) \in Im(\delta)$, entonces $\delta(z) = z + Im(f')$, y por tanto, $(\bar{h} \circ \delta)(z) = h(z) + Im(f) = f(y) + Im(f)$ (por la definición de δ) que está en $Im(f)$ y por tanto es igual a $\bar{0}$ en $coker(f)$.
- Veamos que $ker(\bar{h}) \subseteq Im(\delta)$. Sea $\bar{x} \in ker(\bar{h})$, entonces $h(x) \in Im(f)$. Por tanto $h(x) = f(y)$ para algún $y \in M$. Sea $g(y) = z \in M''$, entonces $f''(z) = (\psi \circ h)(x) = 0$, luego $z \in ker(f'')$, por tanto $\delta(z) = z + Im(f')$ y $\bar{x} \in Im(\delta)$.

□

Corolario 3.6. *Además se verifica que:*

1. *Si la aplicación ϕ es inyectiva, entonces $\bar{\phi}$ también es inyectiva.*
2. *Si la aplicación ψ es suprayectiva, entonces $\bar{\psi}$ también es suprayectiva.*

Demostración.

1. Como ϕ es inyectiva, entonces $ker(\phi) = 0$. Sea $a \in ker(\bar{\phi})$. Por conmutatividad del diagrama, $i_f \circ \bar{\phi} = \phi \circ i_{f'}$. Entonces $\phi \circ i_{f'}(a) = 0$. Ahora i_f es inyectiva, entonces $i_f(a) = 0$ si y sólo si $a = 0$. Luego $\phi(a) = 0$, por tanto $a \in ker(\phi)$, lo que significa que $a = 0$ ya que ϕ es inyectiva.
2. Sea $\bar{b} \in coker(f'')$ y veamos que $\bar{\psi}(\bar{c}) = \bar{b}$ para algún $\bar{c} \in coker(f)$. Ahora, $\pi_{f''}$ es suprayectiva, por tanto $\pi_{f''}(b) = \bar{b}$ para algún $b \in N''$. Y también sabemos que ψ es suprayectiva, entonces $b = \psi(c)$ para algún $c \in N$. Entonces $\pi_f(c) = \bar{c}$ y $\bar{\psi}(\bar{c}) = \bar{b}$ por la conmutatividad del diagrama.

□

4. Fibrados

4.1. Definiciones

Definición 4.1. *Un fibrado vectorial es un esquema de tipo finito sobre* $\mathbb{K}$ *con un morfismo de esquemas* $F \xrightarrow{\pi} X$ *tal que*

- *existe un recubrimiento de* X*,* $X = \sum U_i$
- *para cada* i*,* $\pi^{-1}(U_i) \subseteq F$
- $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times_{Spec(\mathbb{K})} \mathbb{K}^r$ *y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d] & U_i \times_{Spec(\mathbb{K})} \mathbb{K}^r \arrow[dl] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

- *Además se tiene que:*

$$\pi^{-1}(U_i) \supseteq \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \subseteq \pi^{-1}(U_j)$$

  y por la equivalencia anterior tendríamos:

$$U_i \times \mathbb{K}^r \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \cong (U_j \cap U_i) \times \mathbb{K}^r \cong U_j \times \mathbb{K}^r$$

Hay una equivalencia entre la categoría de fibrados vectoriales y haces localemente libres sobre esquemas de tipo finito. Trataremos a la par fibrados y haces, los distinguiremos por el tipo de letra: si F es un fibrado entonces $\mathcal{F}$ será su haz corresponsiente

A continuación daremos la definición de fibrado normal y conormal. Para ello supongamos $\Omega_{X|Y}$ haz de las diferenciales de X restringido a Y.

Teorema 4.2. *Si* X *es una varieda lisa, tiene un fibrado cotangente* Ω_X *(localemente libre, de rango igual a la dimensión de* X *y generado por las diferenciales). Supongamos ahora* $Y \subseteq X$ *subvariedad lisa, entonces existe el epimorfismo siguiente*

$$\Omega_{X|Y} \to \Omega_Y$$

que consiste en la restricción de las diferenciales.

Definición 4.3. *Se llama fibrado conormal de* Y *en* X *al núcleo del epimorfismo anterior. Se llama fibrado normal de* Y *en* X *al dual* $N_{Y|X}$ *del fibrado conormal*

Por tanto se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}} \to 0$$

4.2. Fibrados Universales

Usaremos la notación y los conceptos dados en [1].

Sea $\mathbb{G} = \mathbb{G}(k,n)$. Consideremos $\Lambda \in \mathbb{G}$ como un subespacio lineal k-dimensional de $\mathbb{P}(V)$ o como un subespacio $(k+1)$-dimensional del espacio de vectores V^*. Según el punto de vista que tomemos tenemos dos diagramas donde las aplicaciones son proyecciones naturales:

$$\begin{tikzcd} & I = \{(p,v) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{G} | p \in \Lambda\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & Q^* = \{(v,\Lambda) \in V^* \times \mathbb{G} | v \in \Lambda\} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ V^* & & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

El segundo diagrama da a Q^* una estructura de vector fibrado sobre $\mathbb{G}$. Es más, Q^* es un vector subfibrado del fibrado trivial $V^* \times \mathbb{G}$. De aquí podemos considerar el cociente

$$V^* \times \mathbb{G}/Q^*$$

que llamaremos fibrado vectorial cociente, S.

Podemos asociar a los fibrados Q^* y S su haz localmente libre correspondiente sobre $\mathbb{G}$: $\mathcal{Q}^*$ y $\mathcal{S}$. Dualizando obtenemos la *sucesión exacta universal* sobre $\mathbb{G}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^* \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

Definición 4.4. *Los haces $\mathcal{S}^*$ y $\mathcal{Q}$ de la sucesión anterior se llaman subfibrado universal (de rango $n-k$) y cociente subfibrado universal (de rango $k+1$) respectivamente.*

Notación 4.5. *Llamaremos fibrados universales a los haces localmente libres correspondientes. La notación es consistente si miramos los espacios grassmannianos como el espacio de cocientes de V. Puede no ser notación* *estándar pero preferimos que S y Q tengan el mismo comportamiento al dualizar. Esto es así porque tenemos la siguiente identificación $\mathbb{G}(k,\mathbb{P}^n) \approx \mathbb{G}(n-k-1,\mathbb{P}^{n*})$. Y entonces la sucesión exacta para $\mathbb{G}(n-k-1,\mathbb{P}^{n*})$ es la dual de la sucesión anterior. De esta forma podemos intercambiar los fibrados de S y Q.*

Al intercambiar de forma libre las nociones de haz localmente libre y vector fibrado tenemos que:

- *mirando como vector fibrado, el cociente universal fibrado puede ser interpretado como el dual del subfibrado Q^* del vector fibrado trivial $\mathbb{G} \times V^*$, $Q^* = \{(l,v)$ tal que v es un vector del espacio lineal $\vec{l}$ que define $L\}$*

- *también consideramos el vector fibrado universal $S := \mathbb{G} \times V^*/Q^*$ que puede ser interpretado como el dual del subfibrado de $\mathbb{G} \times V^*$ que consiste en $S = \{(l,h)$ tal que H se anula en $L\}$*

Además se verifica que $S|_{U_{i_0j_0}}$ viene generado por alguno de las formas lineales H_{ijk} definidas anterioremente

$$S^*|_{U_{i_0j_0}} =< H_{i_0j_0k}, \quad k = 0,\ldots,n, \quad k \neq i_0, j_0 >$$

Un modo alternativo de construir fibrados universales es considerar en $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ la sucesión de Euler

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow V \otimes \vartheta_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \vartheta_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow 0$$

haciendo que vuelva a I mediante p y haciendo que vuelva a $\mathbb{G}$ mediante q. Así tendríamos :

- $\mathcal{S}^* = q_*p^*(\Omega_{\mathbb{P}^n}(1))$
- $\mathcal{Q} = q_*p^*(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))$

Observación 4.6. *En $\mathbb{G}(0,n) = \mathbb{P}^n$, la sucesión exacta universal coincide con la sucesión de Euler y $\mathcal{Q} = \vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $\mathcal{S} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n}(-1)$. En $\mathbb{G}(n-1,n) = \mathbb{P}^{n*}$, tenemos que $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^{n*}}(-1)$ y $\mathcal{S} = \vartheta_{\mathbb{P}^{n*}}(1)$.*

De las identificacones de $\mathcal{S}^*$ y $\mathcal{Q}$ con las proyecciones p y q se sigue que $H^0(\mathbb{G},\mathcal{Q}) = V$ y considerando los duales, $H^0(\mathbb{G},\mathcal{S}) = V^*$. En particular:

- dar una sección no nula de $\mathcal{Q}$ es lo mismo que dar un hiperplano de $\mathbb{P}^n$ (salvo constantes)

- dar una sección no nula de $\mathcal{S}$ es lo mismo que dar un punto en $\mathbb{P}^n$ (salvo constantes)

Más en general, tomamos $s_0, \ldots, s_r$ $r+1$ secciones independietes de $\mathcal{S}$. Generan un subespacio lineal $W \subseteq V^*$ de dimensión $r+1$ que define un r-plano $\Omega \subseteq \mathbb{P}^n$. Consideramos el siguiente diagrama conmuitativo de sucesiones exactas de fibrados vectoriales:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & W \times \mathbb{G} \arrow[d] \arrow[dr, "s"] & & \\
0 \arrow[r] & Q^* \arrow[r] & V^* \times \mathbb{G} \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] & 0 \\
 & & V^*/W \times \mathbb{G} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde s está definido por las secciones $s_0, \ldots, s_r$ dadas de $\mathcal{S}$. Queremos estudiar cuándo

$$s: \ W \times \mathbb{G} \ \longrightarrow \ S$$

o su asociada

$$W \times \vartheta_{\mathbb{G}} \ \longrightarrow \ \mathcal{S}$$

no es inyectiva.

Del diagrama tenemos que un elemento $(w, \Lambda) \in W \times \mathbb{G}$ va a 0 por s si y sólo si su imagen en $V^* \times \mathbb{G}$ está en $\mathcal{Q}^*$ y ésto ocurre si y sólo si $w \in \Lambda$. Ésto quiere decir que s no es inyectiva en la fibra de Λ si y sólo si Λ tiene intersección no nula con W.

Así tenemos que el conjunto donde s es degenerada localmente coincide con el conjunto de k-planos $\Lambda \in \mathbb{P}^n$ tal que Λ corta a Ω. (Tenemos un resultado análogo para las secciones de $\mathcal{Q}$). Todo ésto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 4.7. *Tenemos las identificaciones naturales $H^0(\mathbb{G}, \mathcal{Q}) = V$ y $H^0(\mathbb{G}, \mathcal{S}) = V^*$. Bajo estas identificaciones, s secciones independientes de $\mathcal{Q}$ corresponden con un subespacio lineal $A \subseteq \mathbb{P}^n$ de codimensión s.*

Si $s \leq k+1$, el conjunto de dependencia local de las secciones coincide con el conjunto de k-planos que cortan a A en dimensión al menos $k-s+1$.

Análogamente, $r+1$ secciones independientes de $\mathcal{S}$ corresponden con un subespacio lineal $B \subseteq \mathbb{P}^n$ de dimensión r.

Si $r+1 \leq n-k$, el conjunto de dependencia local de las secciones coincide con el conjunto de k-planos que cortan a B.

Si tomamos $s = k+1$ y $r+1 = n-k$, entonces tenemos el mismo conjunto de dependencia local que coincide con el conjunto de k-planos que cortan a un $(n-k-1)$-plano fijado ya que tenemos la siguiente identificación de haces invertibles $\bigwedge^{k+1} \mathcal{Q} \cong \bigwedge^{n-k} \mathcal{S}$ (podemos ver la equivalencia mediante la sucesión exacta universal).

Observación 4.8. *Como este haz invertible es dado por el embebimiento Plücker, lo denotaremos por $\vartheta_{\mathbb{G}}(1)$.*

A continuación daremos una propiedad del fibrado universal Q.

Proposición 4.9. *Supongamos $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1,n)$. Se tiene que $Q^* \cong Q(-1)$ y el isomorfismo viene dado por la siguiente aplicación*

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \cong & Q^* \\ w_{i_0}^* \otimes a_{i_0,j_0}^- & \longleftrightarrow & w_{j_0} \\ w_{j_0}^* \otimes a_{i_0,j_0}^- & \longleftrightarrow & -w_{i_0} \end{array}$$

Demostración. Como Q es un fibrado universal de rango 2, tenemos la aplicación no degenerada siguiente,

$$Q \otimes Q \to \bigwedge^2 Q$$

Como $\bigwedge^2 Q = \vartheta_{\mathbb{G}}(1)$ entonces tenemos la siguiente aplicación bilineal

$$Q \otimes Q \to \vartheta_{\mathbb{G}}(1)$$

y por tanto

$$Q \otimes Q(-1) \to \vartheta_{\mathbb{G}}$$

sigue siendo una aplicación no degenerada. Entonces se verifica que el dual del primer elemento del producto es isomorfo al segundo elemento del producto, es decir $Q^* \cong Q(-1)$.

Daremos el isomorfismo de forma explícita. Para ello pasamos de tensores a homomorfismos. Usamos los isomorfismo obtenidos en la sección (3.3).

Damos el isomorfismo de forma local, en los abiertos $U_{i_0j_0}$. Debemos tomar $V^* = Q$, $\bigwedge^2 V = \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ y $V = Q^*$. Ahora, $\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ está generado por un vector de coordenadas Plücker. Veamos como sería dicho vector:

Suponemos que la matriz de Plücker en $U_{i_0j_0}$ es

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

así haríamos que $p_{i_0j_0} = 1$. Entonces el elemento que genera $\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ es $< (p_{01}, \dots, 1, \dots, p_{n-1n}) >=< a_{\bar{i_0j_0}} >$ (ponemos todas las coordenadas p_{ij} de la matriz (a_{ij}) con $p_{i_0j_0} = 1$).

Por tanto el isomorfismo que buscábamos es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \approx & Q^* \\ w_{i_0}^* \otimes a_{\bar{i_0,j_0}} & \longleftrightarrow & w_{j_0} \\ w_{j_0}^* \otimes a_{\bar{i_0,j_0}} & \longleftrightarrow & -w_{i_0} \end{array}$$

$\square$

4.3. Sucesión de Euler

Queremos estudiar como es la sucesión de Euler:

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}^n} \to \vartheta_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \to \vartheta_{\mathbb{P}^n} \to 0$$

. Lo haremos de forma análoga al Teorema 3.18, Capítulo II de [4].

Sea $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ anillo graduado. Consideramos $S(-1)^{n+1}$ y definimos una aplicación a S.

$$\begin{array}{rccc} \phi: & S(-1)^{n+1} & \longrightarrow & S \\ & F_0, \dots, F_n & \longmapsto & x_0F_0 + \dots + x_nF_n \end{array}$$

ϕ manda elementos homogéneos de grado l en elementos homogéneos de grado l, por tanto ϕ es una aplicación homogénea de grado 0.

Entonces ϕ define un morfismo de haces (usamos $\tilde{F}$ para denotar el haz correspondiente a F):

$$\tilde{\phi}: \quad \widetilde{S(-1)^{n+1}} = \vartheta_{\mathbb{P}^n}(-1)^{n+1} \quad \longrightarrow \quad \widetilde{S} = \vartheta_{\mathbb{P}^n}$$

Aunque ϕ no es suprayectiva, $\tilde{\phi}$ sí lo es. Veámoslo:

$Im(\phi) = (x_0, \dots, x_n)$

$$S(-1)^{n+1} \quad \xrightarrow{\phi} \quad S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/(x_0, \dots, x_n) \cong \mathbb{K} \quad \longrightarrow \quad 0$$

Entonces tendríamos:

$$\widetilde{S(-1)^{n+1}} \overset{\tilde{\phi}=\psi}{\longrightarrow} \widetilde{S} \longrightarrow S/\widetilde{(x_0,\ldots,x_n)} \cong \tilde{0} = 0$$

Llamamos $M = ker(\phi)$ a un módulo que dará un haz $\widetilde{M}$ localmente libre. Los abiertos $D_+(x_i) = Spec(\mathbb{K}[\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}])$ recubren $S(-1)^{n+1}$. M consiste en las $n+1-$úplas $(F_0,\ldots,F_n)$ tal que $x_0F_0+\ldots+x_nF_n = 0$. $\widetilde{M}|_{D_+(x_i)} = \widetilde{M}_{(x_i)}$ son los cocientes homogéneos de grado 0.

Suponemos que los elementos de $M_{(x_i)}$ (que son homogéneos de grado 0) son de la forma $(\frac{F_0}{x_i^a},\ldots,\frac{F_n}{x_i^a}) \in M_{(x_i)}$, con $a \in \mathbb{K}$, necesitaríamos que F_k sean homogéneos de grado $a-1$ y que se verifique además la condición anterior ($(F_0,\ldots,F_n)$ tal que $x_0F_0+\ldots+x_nF_n = 0$). Entonces podemos despejar F_i en función de $F_0,\ldots,\hat{F}_i,\ldots,F_n$

Sabemos que $M_{(x_i)}$ es un $\mathbb{K}[\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}]$-módulo libre de base:
$(\frac{1}{x_i},-\frac{x_0}{x_i^2},0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,-\frac{x_n}{x_i^2},\frac{1}{x_i})$

Ésto es por,

$$(\frac{F_0}{x_i^a},\ldots,\frac{F_n}{x_i^a}) = \frac{F_0}{x_i^{a-1}}\overbrace{(\frac{1}{x_i},0,\ldots,0,\underbrace{-\frac{x_0}{x_i^2}}_{i},0,\ldots,0)}^{d(\frac{x_0}{x_i})} + \underbrace{\ldots}_{\hat{i}} +$$

$$\frac{F_n}{x_i^{a-1}}\overbrace{(0,\ldots,0,\underbrace{-\frac{x_n}{x_i^2}}_{(i)},0,\ldots,0,\frac{1}{x_i})}^{d(\frac{x_n}{x_i})}$$

A cada elemento de la base lo llamamos como sigue:

$$d(\frac{x_k}{x_i}) = (0,\ldots,0,\underbrace{-\frac{x_k}{x_i^2}}_{(i)},0,\ldots,0,\underbrace{\frac{1}{x_i}}_{(k)},0,\ldots,0)$$

Así tendremos en $D_+(x_i)$ una base,

$$d(\frac{x_0}{x_{ij}}),\ldots,d(\frac{x_n}{x_i})$$

Existe una relación entre las bases que verifica las reglas de derivación,

$$d(\frac{x_k}{x_j}) = (0,\dots,0,\underbrace{-\frac{x_k}{x_j^2}}_{(j)},0,\dots,0,\underbrace{\frac{1}{x_j}}_{(k)},0,\dots,0)$$

$$d(\frac{x_k}{x_{i'}}) = (0,\dots,0,\underbrace{-\frac{x_k}{x_{i'}^2}}_{(i')},0,\dots,0,\underbrace{\frac{1}{x_{i'}}}_{(k)},0,\dots,0)$$

$$d(\frac{x_j}{x_{i'}}) = (0,\dots,0,\underbrace{-\frac{x_j}{x_{i'}^2}}_{(i')},0,\dots,0,\underbrace{\frac{1}{x_{i'}}}_{(j)},0,\dots,0)$$

$$d(\frac{x_k}{x_j}) = \frac{x_{i'}}{x_j}d(\frac{x_k}{x_{i'}}) - \frac{x_{i'}x_k}{x_j^2}d(\frac{x_j}{x_{i'}})$$

Ya tenemos como son los elementos de la base de $M = ker(\phi)$ que es lo que queríamos. Teniendo esta idea de la sucesión de Euler nos será más intuitivo ver que el isomorfismo de la siguiente subsección es cierto.

Más adelante usaremos la sucesión de Euler y la base del núcleo que hemos caluclado para el caso particular de la grassmanniana $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1,n)$,

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(-1)^{\binom{n+1}{2}} \to \vartheta_{\mathbb{G}} \to 0$$

4.4. Isomorfismo entre fibrados universales y el haz de las diferenciales $S^* \otimes Q^* \cong \Omega_{\mathbb{G}}$

Nos apoyaremos en [2]. Sé sabe que $Q^* \otimes S^* \cong \Omega_{\mathbb{G}}$ para cualquier grassmanniana, lo probaremos en el caso $k = 1$ pues el caso general es bastante engorroso.

Lema 4.10. *Sea $U_{i_0j_0}$ el subconjunto de $\mathbb{G}$ que consiste en aquellas rectas donde las coordenadas Plücker $p_{i_0j_0}$ no son cero. Se sabe que $U_{i_0j_0}$ es un conjunto abierto afín de $\mathbb{G}$ con coordenadas afines $\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}$, $\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}$ donde $k = 0,\dots,\hat{i_0},\dots,\hat{j_0},\dots,n$. Entonces existe un isomorfismo*

$$Q^* \otimes S^* \cong \Omega_{\mathbb{G}}$$

determinado en cada $U_{i_0j_0}$ por

$$\begin{array}{ccc} Q^* \otimes S^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{G}} \\ (\bar{p}, w_{i_0} \otimes H_{i_0j_0k}) & \longmapsto & p_{i_0j_0}^2 d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) \\ (\bar{p}, w_{j_0} \otimes H_{i_0j_0k}) & \longmapsto & p_{i_0j_0}^2 d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}) \end{array}$$

donde $\bar{p}$ son las coordenadas Plücker de un elemento de $U_{i_0j_0}$.

Demostración. Como $U_{i_0j_0}$ es isomorfo a un espacio afín de coordenadas $\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}$, $\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}$ con $k = 0, \dots, \hat{i_0}, \dots, \hat{j_0}, \dots, n$ se tiene que $\Omega_{\mathbb{G}|U_{i_0j_0}}$ es trivial y una base viene dada por $d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}})$, $d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}})$ con $k = 0, \dots, \hat{i_0}, \dots, \hat{j_0}, \dots, n$.

De aquí podemos definir unívocamente un isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \phi_{i_0j_0}: & \Omega_{\mathbb{G}|U_{i_0j_0}} & \longrightarrow & (Q^* \otimes S^*)|U_{i_0j_0} \\ & (\bar{p}, d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}})) & \longmapsto & (\bar{p}, \frac{1}{p_{i_0j_0}^2} w_{i_0} \otimes H_{i_0j_0k}) \\ & (\bar{p}, d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}})) & \longmapsto & (\bar{p}, \frac{1}{p_{i_0j_0}^2} w_{j_0} \otimes H_{i_0j_0k}) \end{array}$$

Obsérvese que $d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) = -d(\frac{q_{i_0k}}{q_{j_0i_0}})$ y $H_{j_0i_0k} = -H_{i_0j_0k}$,entonces la segunda asignación parece natural si queremos mantener algo de simetría en los índices i_0, j_0, k.

De la relación de Plücker

$$d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}}) = \frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}} d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j}}) + \frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}} d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) - \frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}} d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}) - \frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}} d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})$$

De aquí tenemos que: (omitimos $\bar{p}$ de la función anterior para simplificar la notación)

$$\phi_{i_0j_0}: \quad d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}}) \quad \longmapsto \quad \frac{1}{p_{i_0j_0}^2}(w_{j_0} \otimes H_{i_0kl} - w_{i_0} \otimes H_{j_0kl})$$

Veamos que la asignación anterior es correcta, para ello primero calcularemos $\phi_{i_0j_0}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}}))$ y simplificaremos el resultado. Luego desarrollaremos la expresión $w_{j_0} \otimes H_{i_0kl} - w_{i_0} \otimes H_{j_0kl}$ y la simplificaremos. Por último veremos con algunas equivalencias que las dos expresiones obtenidas son iguales.

1. Calculamos $\phi_{i_0j_0}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}}))$.

$$\phi_{i_0j_0}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})) = \frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}} \phi(d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})) + \frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}} \phi(d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}})) - \frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}} \phi(d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}})) - \frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}} \phi(d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})) =$$

$$\frac{1}{p_{i_0j_0}^2}(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}} w_{j_0} \otimes H_{i_0j_0l} + \frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}} w_{i_0} \otimes H_{i_0j_0k} - \frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}} w_{j_0} \otimes H_{i_0j_0k} - \frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}} w_{i_0} \otimes H_{i_0j_0l}) =$$

usamos que:

$$H_{i_0j_0k} = p_{j_0k} x_{i_0} - p_{i_0k} x_{j_0} + p_{i_0j_0} x_k$$

$$= \frac{1}{p_{i_0j_0}^2}(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}w_{j_0}\otimes(p_{j_0l}x_{i_0}-p_{i_0l}x_{j_0}+p_{i_0j_0}x_l)+\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}w_{i_0}\otimes(p_{j_0k}x_{i_0}-p_{i_0k}x_{j_0}+p_{i_0j_0}x_k)-$$

$$\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}w_{j_0}\otimes(p_{j_0k}x_{i_0}-p_{i_0k}x_{j_0}+p_{i_0j_0}x_k)-\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}w_{i_0}\otimes(p_{j_0l}x_{i_0}-p_{i_0l}x_{j_0}+p_{i_0j_0}x_l)) =$$

$$= \frac{1}{p_{i_0j_0}^2}(w_{j_0}\otimes x_{i_0}(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0l}-\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0k})+w_{j_0}\otimes x_{j_0}(-\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0l}+\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0k})+w_{j_0}\otimes x_k(-\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0})+$$

$$w_{j_0}\otimes x_l(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0})+w_{i_0}\otimes x_{i_0}(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0k}-\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0l})+w_{i_0}\otimes x_{j_0}(-\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0k}+\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0l})+$$

$$w_{i_0}\otimes x_k(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0}) + w_{i_0}\otimes x_l(-\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0}))$$

2. Calculamos $w_{j_0}\otimes H_{i_0kl} - w_{i_0}\otimes H_{j_0kl}$.

$$w_{j_0}\otimes H_{i_0kl}-w_{i_0}\otimes H_{j_0kl} = w_{j_0}\otimes(p_{kl}x_{i_0}-p_{i_0l}x_k+p_{i_0k}x_l)-w_{i_0}\otimes(p_{kl}x_{j_0}-$$

$$p_{j_0l}x_k+p_{j_0k}x_l) = w_{j_0}\otimes x_{i_0}(p_{kl}) + w_{j_0}\otimes x_k(-p_{i_0l}) + w_{j_0}\otimes x_l(-p_{i_0k})+$$

$$w_{i_0}\otimes x_{j_0}(-p_{kl}) + w_{i_0}\otimes x_k(p_{j_0l}) + w_{i_0}\otimes x_l(-p_{j_0k})$$

3. Igualamos coeficiente a coeficiente lo que hemos obtenido de (1) y (2):

   - $\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0l} - \frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0k} = p_{kl}$
   - $-\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0l} + \frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0k} = 0$
   - $-\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0} = -p_{i_0l}$
   - $\frac{`q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0} = p_{i_0k}$
   - $\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0k} - \frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{j_0l} = 0$
   - $-\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0k} + \frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0l} = -p_{kl}$
   - $\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0} = p_{j_0l}$
   - $-\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}p_{i_0j_0} = -p_{j_0k}$

   Todas las igualdades anteriores se dan por la relación de Plücker.

Falta probar que los isomorfismos $\{\phi_{i_0j_0}\}$ pegan bien en $U_{i_0j_0}\bigcap U_{i'j'}$. Para ello necesitamos comprobar que cada $d(\frac{q_{kl}}{q_{i'j'}})$ tiene la misma imagen mediante $\phi_{i_0j_0}$ que mediante $\phi_{i'j'}$. Usaremos las siguientes relaciones:

$$w_{i'} = \frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} - \frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}$$
$$w_{j'} = \frac{p_{i_0j'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} - \frac{p_{j_0j'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}$$

Veamos por qué se dan las dos igualdades anteriores. Se tiene que:

$$w_{i_0} = (p_{i_00}, \ldots, p_{i_0n})$$
$$w_i' = (p_{i'0}, \ldots, p_{i'n})$$
$$w_{j_0} = (p_{j_00}, \ldots, p_{j_0n})$$
$$w_j' = (p_{j'0}, \ldots, p_{j'n})$$

Restamos las siguientes igualdades,

$$\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} = (\frac{p_{i_0i'}p_{j_00}}{p_{i_0j_0}}, \ldots, \frac{p_{i_0i'}p_{j_0n}}{p_{i_0j_0}})$$
$$\frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0} = (\frac{p_{j_0i'}p_{i_00}}{p_{i_0j_0}}, \ldots, \frac{p_{j_0i'}p_{i_0n}}{p_{i_0j_0}})$$

quedándonos lo siguiente,

$$\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} - \frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0} = (\frac{p_{i_0i'}p_{j_00}}{p_{i_0j_0}} - \frac{p_{j_0i'}p_{i_00}}{p_{i_0j_0}}, \ldots, \frac{p_{i_0i'}p_{j_0n}}{p_{i_0j_0}} - \frac{p_{j_0i'}p_{i_0n_0}}{p_{i_0j_0}}) =$$

$$= (p_{i'0}, \ldots, p_{i'n}) = w_{i'}$$

De forma análoga para la otra relación.
Ahora veremos que los isomorfismos $\{\phi_{i_0j_0}\}$ pegan bien en $U_{i_0j_0}\bigcap U_{i'j'}$.

1. Calculamos $\phi_{i'j'}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i'j'}}))$

$$\phi_{i'j'}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i'j'}})) = \frac{1}{p^2_{i'j'}}(w_{j'} \otimes H_{i'kl} - w_{i'} \otimes H_{j'kl}) = \frac{1}{p^2_{i'j'}}((\frac{p_{i_0j'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} -$$

$$\frac{p_{j_0j'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}) \otimes H_{i'kl} - (\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} - \frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}) \otimes H_{j'kl}) = \frac{1}{p^2_{i'j'}}(\frac{p_{i_0j'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} \otimes (p_{kl}x_{i'} -$$

$$p_{i'l}x_k+p_{i'k}x_l)-\frac{p_{j_0j'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}\otimes(p_{kl}x_{i'}-p_{i'l}x_k+p_{i'k}x_l)-\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0}\otimes(p_{kl}x_{j'}-$$

$$p_{j'l}x_k+p_{j'k}x_l)+\frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}\otimes(p_{kl}x_{j'}-p_{j'l}x_k+p_{j'k}x_l))=$$

$$=\frac{1}{p_{i_0j_0}p_{i'j'}^2}(w_{j_0}\otimes(\frac{p_{i_0j'}}{p_{i_0j_0}}p_{kl}x_{i'}-\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}p_{kl}x_{j'}+(-\frac{p_{i_0j'}}{p_{i_0j_0}}p_{i'l}+\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}p_{j'l})x_k+$$

$$+(\frac{p_{i_0j'}}{p_{i_0j_0}}p_{i'k}-\frac{p_{i_0i'}}{p_{i_0j_0}}p_{j'k})x_l)+w_{i_0}\otimes(-\frac{p_{j_0j'}}{p_{i_0j_0}}p_{kl}x_{i'}+\frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}p_{kl}x_{j'}+$$

$$(\frac{p_{j_0j'}}{p_{i_0j_0}}p_{i'l}-\frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}p_{j'l})x_k+(-\frac{p_{j_0j'}}{p_{i_0j_0}}p_{i'k}+\frac{p_{j_0i'}}{p_{i_0j_0}}p_{j'k})x_l))$$

usando la relación de Plücker tenemos las siguientes identificaciones:

$w_{j_0}\otimes x_{i'}\rightsquigarrow p_{i_0j'}p_{kl}=p_{i_0j'}p_{kl}$

$w_{j_0}\otimes x_{j'}\rightsquigarrow -p_{i_0i'}p_{kl}=-p_{i_0i'}p_{kl}$

$w_{j_0}\otimes x_k\rightsquigarrow -p_{i_0j'}p_{i'l}+p_{i_0i'}p_{j'l}=-p_{i'j'}p_{j_0l}$

$w_{j_0}\otimes x_l\rightsquigarrow p_{i_0j'}p_{i'k}-p_{i_0i'}p_{j'k}=p_{i'j'}p_{i_0k}$

$w_{i_0}\otimes x_{i'}\rightsquigarrow -p_{j_0j'}p_{kl}=-p_{j_0j'}p_{kl}$

$w_{i_0}\otimes x_{j'}\rightsquigarrow p_{j_0i'}p_{kl}=p_{j_0i'}p_{kl}$

$w_{i_0}\otimes x_k\rightsquigarrow p_{j_0j'}p_{i'l}-p_{j_0l'}p_{j'l}=p_{i'j'}p_{j_0l}$

$w_{i_0}\otimes x_l\rightsquigarrow -p_{j_0j'}p_{i'k}+p_{j_0i'}p_{j'k}=-p_{i'j'}p_{j_0k}$

Así tenemos que:

$$\phi_{i'j'}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i'j'}}))=\frac{1}{p_{i_0j_0}p_{i'j'}^2}(w_{i_0}\otimes(p_{i'j'}p_{j_0l}x_k-p_{i'j'}p_{j_0k}x_l-p_{j_0j'}p_{kl}x_{i'}+p_{j_0i'}p_{kl}x_{j'})+$$

$$+w_{j_0}\otimes(-p_{i'j'}p_{i_0l}x_k+p_{i'j'}p_{i_0k}x_l+p_{ij'}p_{kl}x_{i'}-p_{i_0i'}p_{kl}x_{j'}))$$

2. Calculamos $\phi_{i_0j_0}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i'j'}}))$

   Para ello usaremos la siguiente igualdad:

$$d(\frac{p_{kl}}{p_{i'j'}})=\frac{p_{i_0j_0}^2}{p_{i'j'}^2}(\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}})-\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}))$$

   Esta igualdad viene de derivar

$$\frac{p_{kl}}{p_{i'j'}}=\frac{\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}}{\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}}$$

$$d(\frac{p_{kl}}{p_{i'j'}}) = d(\frac{\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}}{\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}}) = \frac{1}{\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}^2}(d(\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}})\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}} - \frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}})) =$$

$$= \frac{p_{i_0j_0}^2}{p_{i'j'}^2}(\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}) - \frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}))$$

Usamos la definición de $\phi_{i_0j_0}$

$$\phi_{i_0j_0}(d(\frac{q_{kl}}{q_{i'j'}})) = \frac{p_{i_0j_0}^2}{p_{i'j'}^2}(\frac{p_{i'j'}}{p_{i_0j_0}}\frac{1}{p_{i_0j_0}^2}(w_{j_0} \otimes H_{i_0kl} - w_{i_0} \otimes H_{j_0kl}) -$$

$$-\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}}\frac{1}{p_{i_0j_0}^2}(w_{j_0} \otimes H_{i_0i'j'} - w_{i_0} \otimes H_{j_0i'j'})) =$$

Queremos comprobar que es igual a la expresión del apartado (1).

$$= \frac{1}{p_{i'j'}p_{i_0j_0}}(w_{j_0} \otimes (p_{kl}x_{i_0} - p_{i_0l}x_k + p_{i_0k}x_l) - w_{i_0} \otimes (p_{kl}x_{j_0} - p_{j_0l}x_k + p_{j_0k}x_l)) +$$

$$\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}p_{i'j'}^2}(-w_{j_0} \otimes (p_{i'j'}x_{i_0} - p_{i_0j'}x_{i'} + p_{i_0i'}x_{j'}) + w_{i_0} \otimes (p_{i'j'}x_{j_0} - p_{j_0j'}x_{i'} + p_{j_0i'}x_{j'})) =$$

$$\frac{1}{p_{i_0j_0}p_{i'j'}^2}(w_{j_0} \otimes (p_{i'j'}p_{kl}x_{i_0} - p_{i'j'}p_{i_0l}x_k + p_{i'j'}p_{i_0k}x_l) - w_{i_0} \otimes (p_{i'j'}p_{kl}x_{j_0} - p_{i'j'}p_{j_0l}x_k +$$

$$p_{i'j'}p_{j_0k}x_l)) + \frac{1}{p_{i_0j_0}p_{i'j'}^2}(-w_{j_0} \otimes (-p_{kl}p_{i'j'}x_{i_0} + p_{kl}p_{ij'}x_{i'} - p_{kl}p_{i_0i'}x_{j'}) +$$

$$w_{i_0} \otimes (p_{kl}p_{i'j'}x_{j_0} - p_{kl}p_{j_0j'}x_{i'} + p_{kl}p_{j_0i'}x_{j'})) = \frac{1}{p_{i_0j_0}p_{i'j'}^2}(w_{j_0} \otimes (x_{i_0}(p_{i'j'}p_{kl} -$$

$$p_{kl}p_{i'j'}) + x_{i'}(p_{kl}p_{i_0j'}) + x_{j'}(-p_{kl}p_{i_0i'}) + x_k(-p_{i'j'}p_{i_0l}) + x_l(p_{i'j'}p_{i_0k})) +$$

$$w_{i_0} \otimes (x_{j_0}(-p_{i'j'}p_{kl} + p_{kl}p_{i'j'}) + x_{i'}(-p_{kl}p_{j_0j'}) + x_{j'}(p_{kl}p_{j_0i'}) + x_k(p_{i'j'}p_{j_0l}) +$$

$$x_l(-p_{i'j'}p_{j_0k})))$$

Esta expresión coincide con la expresión que teníamos.

$\square$

5. Fibrado conormal

5.1. Diagrama conmutativo

Nuestro objetivo en esta sección es probar que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[rr, "\varphi_1"] & & \Omega_{\mathbb{G}} \\
S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[ur, "\varphi_4"] \arrow[rrr, "\varphi_3"] & & & S^* \otimes Q^* \arrow[u, "\varphi_2"']
\end{tikzcd}$$

Para esto estudiaremos cada aplicación por separado y de forma local, trabajaremos en los abiertos $U_{i_0 j_0}$ definidos en la sección 1.1

1. $\varphi_1 : \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}}$

   Esta aplicación viene de la sucesión mencionada en el apartado 4.1

   $$0 \to N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \to \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \to \Omega_{\mathbb{G}} \to 0$$

   Sabemos que $\Omega_{\mathbb{G}}$ está generado por $d(\frac{q_{i_0 j}}{q_{i_0 j_0}})$ y $d(\frac{q_{i j_0}}{q_{i_0 j_0}})$ (que también son elementos de $\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$).

   Faltaría dar la imagen de $d(\frac{q_{ij}}{q_{i_0 j_0}})$. Para ello usaremos la relación de Plücker ya conocida,

   $$p_{ij} p_{i_0 j_0} - p_{i i_0} p_{j j_0} + p_{i j_0} p_{j i_0} = 0$$

   y de aquí obtenemos una relación entre las diferenciales,

   $$d(\frac{p_{ij}}{p_{i_0 j_0}}) = \frac{p_{i_0 i}}{p_{i_0 j_0}} d(\frac{p_{j_0 j}}{p_{i_0 j_0}}) + \frac{p_{j_0 j}}{p_{i_0 j_0}} d(\frac{p_{i_0 i}}{p_{i_0 j_0}}) - \frac{p_{i_0 j}}{p_{i_0 j_0}} d(\frac{p_{j_0 i}}{p_{i_0 j_0}}) - \frac{p_{j_0 i}}{p_{i_0 j_0}} d(\frac{p_{i_0 j}}{p_{i_0 j_0}})$$

   Así tendríamos que:

   $$\begin{array}{llll}
   \varphi_1 : & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{G}} \\
   & d(\frac{q_{i_0 j}}{q_{i_0 j_0}}) & \longmapsto & d(\frac{q_{i_0 j}}{q_{i_0 j_0}}) \\
   & d(\frac{q_{i j_0}}{q_{i_0 j_0}}) & \longmapsto & d(\frac{q_{i j_0}}{q_{i_0 j_0}}) \\
   & d(\frac{q_{ij}}{q_{i_0 j_0}}) & \longmapsto & \frac{q_{i_0 i}}{q_{i_0 j_0}} d(\frac{q_{j_0 j}}{q_{i_0 j_0}}) + \frac{q_{j_0 j}}{q_{i_0 j_0}} d(\frac{q_{i_0 i}}{q_{i_0 j_0}}) - \frac{q_{i_0 j}}{q_{i_0 j_0}} d(\frac{q_{j_0 i}}{q_{i_0 j_0}}) - \frac{q_{j_0 i}}{q_{i_0 j_0}} d(\frac{q_{i_0 j}}{q_{i_0 j_0}})
   \end{array}$$

   Ya tenemos definida la primera de las aplicaciones.

2. $\varphi_2 : S^* \otimes Q^* \to \Omega_{\mathbb{G}}$

   Esta aplicación ya la conocíamos por la sección 3.4, vamos a recordarla.

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & S^* \otimes Q^* & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{G}} \\ & (\bar{p}, w_{i_0} \otimes H_{i_0 j_0 k}) & \longmapsto & p^2_{i_0 j_0} d(\frac{q_{i_0 k}}{q_{i_0 j_0}}) \\ & (\bar{p}, w_{j_0} \otimes H_{i_0 j_0 k}) & \longmapsto & p^2_{i_0 j_0} d(\frac{q_{j_0 k}}{q_{i_0 j_0}}) \end{array}$$

   donde

   - $\bar{p}$ simboliza las coordenadas de Plücker de un elemento de $U_{i_0 j_0}$
   - $w_{i_0} = (p_{i0}, \ldots, p_{in})$ donde $i = 0, \ldots, n$
   - $H_{ijk} = p_{jk} x_i - p_{ik} x_j + p_{ij} x_k$ donde $i, j, k = 0, \ldots, n$ y $x_0, \ldots, x_n$ es un sistema de coordenadas de $\mathbb{P}^n$

3. $\varphi_3 : S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to S^* \otimes Q^*$

   Esta aplicación viene de modificar la sucesión exacta universal (sección 4.2). Necesitaremos también el isomorfismo probado en la Proposición 4.9.

$$0 \to S^* \to H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}} \to Q \to 0$$

$$0 \to S^*(-1) \to H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to Q(-1) = Q^* \to 0$$

   Hacemos producto tensorial con S^* y usamos la siguiente notación: $S^* \otimes S^*(-1) = S^* \otimes S^* \otimes \vartheta(-1)$.

$$0 \to S^* \otimes S^* \otimes \vartheta(-1) \to S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \xrightarrow{\varphi_3} S^* \otimes Q^* \to 0$$

   Ahora, de la sucesión exacta universal tenemos que la siguiente sucesión es exacta,

$$0 \to Q^* \subseteq \mathbb{G} \times H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))^* \to S \to 0$$

   y además $Q^* \to \mathbb{G} \times H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))^*$ es una aplicación inyectiva, y por tanto,

$$Q(-1) \to \mathbb{G} \times H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))^*$$

   es inyectiva. Al dualizar nos quedaría que

$$\mathbb{G} \times H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \to Q(1)^*$$

   es una aplicación suprayectiva, y finalmente obtenemos la siguiente aplicación entre fibrados

$$\mathbb{G} \times H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \times \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to Q^*$$

. Si pasamos al producto tensorial tendríamos la aplicación lineal,

$$H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to Q^*$$

y por tanto,

$$S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to S^* \otimes Q^*$$

también es una aplicación lineal.

Así tenemos la aplicación $S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to S^* \otimes Q^*$ que es un morfismo de fibrados triviales localmente. Ahora, para definir la aplicación debemos tener presente que $H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}$ está generado por los hiperplanos x_i de $\mathbb{P}^n$ que verifican $q_{ij} = x_i \wedge x_j$.

Debemos dar la aplicación $H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \times \mathbb{G} \to Q =< w_{i_0}, w_{j_0} >^*$ $= \{< w_{i_0}, w_{j_0} > \to \mathbb{K}\} =< w_{i_0}^*, w_{j_0}^* >$ que es la aplicación restricción por ser la dual de la inclusión $Q^* \subseteq H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))^* \times \mathbb{G}$. Ahora, sabemos que los hiperplanos $x_i \in H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))$ generan $H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))$, entonces

$$\begin{array}{ccc} H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \times \mathbb{G} & \longrightarrow & Q =< w_{i_0}^*, w_{j_0}^* > \\ x_l & \longmapsto & \frac{p_{i_0 l}}{p_{i_0 j_0}} w_{i_0}^* + \frac{p_{j_0 l}}{p_{i_0 j_0}} w_{j_0}^* \end{array}$$

Esta aplicación la definimos así por lo siguiente: suponemos que estamos en un espacio vectorial V de dimensión n con base $B = \{v_0, \ldots, v_n\}$, su espacio dual V^* con base $B^* = \{v_0^*, \ldots, v_n^*\}$ verificando

$$\begin{array}{rccc} v_i^* : & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v_j & \longmapsto & \delta_{ij} \end{array}$$

Supongamos ahora $f \in V^*$ y que viene dada por

$$\begin{array}{rccc} f : & V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & v & \longmapsto & \lambda_0 v_0^* + \ldots + \lambda_n v_n^* \end{array}$$

Entonces tendríamos que $f(v_i) = \lambda_i$.

Para conseguir la aplicación que queremos, debemos tensorizar por $\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$

$$H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \to Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \cong Q^*$$

Usamos el isomorfismo $Q^* \approx Q(-1)$

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & Q \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & Q^* \\ x_l \otimes a^{-}_{i_0 j_0} & \longmapsto & \frac{p_{i_0 l}}{p_{i_0 j_0}} w_{i_0}^* \otimes a^{-}_{i_0 j_0} + \frac{p_{j_0 l}}{p_{i_0 j_0}} w_{j_0}^* \otimes a^{-}_{i_0 j_0} & \longmapsto & \frac{p_{i_0 l}}{p_{i_0 j_0}} w_{j_0} - \frac{p_{j_0 l}}{p_{i_0 j_0}} w_{i_0} \end{array}$$

Y por tanto:

$$\begin{array}{llll} \varphi_3: & S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & S^*\otimes Q^* \\ & H_{i_0j_0k}\otimes x_l\otimes a_{\bar{i}_0j_0} & \longmapsto & H_{i_0j_0k}\otimes\frac{p_{i_0l}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0}-H_{i_0j_0k}\frac{p_{j_0l}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0} \end{array}$$

es la aplicación que estábamos buscando.

4. $\varphi_4 : S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)\to\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$

   Esta aplicación viene de completar el complejo de Eagon-Northcott (visto en la sección 3.4)

$$0\longrightarrow S^2S^*\longrightarrow S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\longrightarrow\bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}\longrightarrow\vartheta_{\mathbb{G}}(1)\longrightarrow 0$$

   con la sucesión de Euler (visto en la sección 3.3)

$$0\longrightarrow\Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}\longrightarrow\vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(-1)^{\binom{n+1}{2}}=\bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)\longrightarrow\vartheta_{\mathbb{G}}\longrightarrow 0$$

   Así tendríamos:

$$0\;\to\;S^2S^*\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)\;\to\;S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)\;\dots$$

$$\begin{tikzcd}
\dots\ S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r] & \vartheta_{\mathbb{G}} \arrow[r] & 0 \\
& \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

   Llamamos ψ a la siguiente aplicación

$$\vartheta_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}(-1)^{\binom{n+1}{2}}=\bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)\;\stackrel{\psi}{\to}\;\vartheta_{\mathbb{G}}$$

   y llamamos φ a la siguiente

$$S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)\;\stackrel{\varphi}{\to}\;\bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$$

   Tenemos que dar una base del núcleo de ψ y relacionar la imagen de los elementos de la base de $S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ por φ con los elementos del nucleo de ψ. Entonces, primero definiremos φ, dando la imagen de los elementos, luego definiremos ψ, dando los elementos del núcleo y por último relacionaremos ambas cosas.

Empezamos definiendo φ. Damos la aplicación de forma explícita,

$$\begin{array}{ccc} S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & \bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\ H_{i_0j_0k} \otimes x_l \otimes a_{\bar{i_0j_0}} & \longmapsto & H_{i_0j_0k} \wedge x_l \otimes a_{\bar{i_0j_0}} \end{array}$$

Ahora sabemos que:

$H_{ijk} = p_{jk}x_i - p_{ik}x_j + p_{ij}x_k$

$H_{i_0j_0k} \wedge x_l = p_{j_0k}x_{i_0} \wedge x_l - p_{i_0k}x_{j_0} \wedge x_l + p_{i_0j_0}x_k \wedge x_l = p_{j_0k}q_{i_0l} - p_{i_0k}q_{j_0l} + p_{i_0j}q_{kl}$

donde p_{rs} son las coordenadas Plücker (números) y las q_{rs} están en el espacio vectorial $H^0(\vartheta_{\mathbb{G}}(1))$.

Así tenemos que $H_{i_0j_0k} \wedge x_l$ son ecuaciones de hiperplanos en el espacio de Plücker donde está nuestra grassmanniana. Luego,

$$\begin{array}{ccl} S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & \bigwedge^2 H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\ H_{i_0j_0k} \otimes x_l \otimes a_{\bar{i_0j_0}} & \longmapsto & H_{i_0j_0k} \wedge x_l \otimes a_{\bar{i_0j_0}} = p_{j_0k}q_{i_0l} \otimes a_{\bar{i_0j_0}} - \\ & & p_{i_0k}q_{j_0l} \otimes a_{\bar{i_0j_0}} + p_{i_0j_0}q_{kl} \otimes a_{\bar{i_0j_0}} \end{array}$$

Para dar los elementos del núcleo de ψ repetiremos un razonamiento análogo al dado en la sección (4.3), para la grassmanniana $\mathbb{G} = \mathbb{G}(1, n)$. De esta forma abtenemos que los elementos de la base del núcleo son de la forma $d(\frac{q_{01}}{q_{i_0j_0}}), \ldots, d(\frac{q_{n-in}}{q_{i_0j_0}})$ donde

$$d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{p_{kl}}{p^2_{i_0j_0}}}_{(ij)}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{p_{i_0j_0}}}_{(kl)}, 0, \ldots, 0)$$

Por último vamos a dar una relación entre los elementos de la base del núcleo, $d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})$ y los hiperplanos.

$$d(\frac{q_{kl}}{q_{ij}}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{-\frac{p_{kl}}{p^2_{ij}}}_{(ij)}, 0, \ldots, 0, \underbrace{\frac{1}{p_{ij}}}_{(kl)}, 0, \ldots, 0)$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{1}{p_{ij}}q_{kl}-\frac{p_{kl}}{p_{ij}^2}q_{ij}$$

Para dar la aplicación que queremos debemos poner

$$p_{j_0k}q_{i_0l}\otimes a_{i_0j_0}^{-}-p_{i_0k}q_{j_0l}\otimes a_{i_0j_0}^{-}+p_{i_0j_0}q_{kl}\otimes a_{i_0j_0}^{-}$$

o

$$p_{j_0k}q_{i_0l}-p_{i_0k}q_{j_0l}+p_{i_0j_0}q_{kl}$$

de la aplicación φ como combinación de los elementos del núcleo dados anteriormente $d(\frac{q_{lk}}{q_{i_0j_0}})$.

Tenemos que:

$$d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})\leftrightarrow\frac{1}{p_{i_0j_0}}q_{i_0l}-\frac{p_{i_0l}}{p_{i_0j_0}^2}q_{i_0j_0}$$

$$d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})\leftrightarrow\frac{1}{p_{i_0j_0}}q_{j_0l}-\frac{p_{j_0l}}{p_{i_0j_0}^2}q_{i_0j_0}$$

$$d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})\leftrightarrow\frac{1}{p_{i_0j_0}}q_{kl}-\frac{p_{kl}}{p_{i_0j_0}^2}q_{i_0j_0}$$

entonces,

$$p_{j_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})-p_{i_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})+p_{i_0j_0}^2d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})$$

$$\updownarrow$$

$$p_{j_0k}q_{i_0l}-p_{i_0k}q_{j_0l}+p_{i_0j_0}q_{kl}+\frac{p_{i_0k}p_{j_0l}-p_{j_0k}p_{i_0}}{p_{i_0j_0}}q_{i_0j_0}-p_{kl}q_{i_0j_0}=$$

$$p_{j_0k}q_{i_0l}-p_{i_0k}q_{j_0l}+p_{i_0j_0}q_{kl}+\frac{p_{kl}p_{i_0j_0}}{p_{i_0j_0}}q_{i_0j_0}-p_{kl}q_{i_0j_0}=$$

$$p_{j_0k}q_{i_0l}-p_{i_0k}q_{j_0l}+p_{i_0j_0}q_{kl}$$

Definimos finalmente la aplicación φ_4

$$\begin{array}{rccl}\varphi_4: & S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}\\ & H_{i_0j_0k}\otimes x_l\otimes a_{i_0j_0}^{-} & \longmapsto & p_{j_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})-p_{i_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})+p_{i_0j_0}^2d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})\end{array}$$

Por último comprobaremos que el diagrama conmuta. Damos la composición de las aplicaciones φ_2 y φ_3

$$\varphi_3(H_{i_0j_0k}\otimes x_l\otimes a^-_{i_0j_0}) = H_{i_0j_0k}\otimes \frac{p_{i_0l}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0} - H_{i_0j_0k}\frac{p_{j_0l}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}$$

$$\varphi_2(H_{i_0j_0k}\otimes\frac{p_{ii_0}}{p_{i_0j_0}}w_{j_0}-H_{i_0j_0k}\frac{p_{jj_0}}{p_{i_0j_0}}w_{i_0}) = p^2_{i_0j_0}\frac{p_{i_0l}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}})+p^2_{i_0j_0}\frac{p_{j_0l}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) =$$

$$= p_{i_0j_0}p_{i_0l}d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}) - p_{i_0j_0}p_{j_0l}d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}})$$

$$\begin{array}{rcl} S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \stackrel{\varphi_2\circ\varphi_3}{\longrightarrow} & \Omega_{\mathbb{G}} \\ H_{i_0j_0k}\otimes x_l\otimes a^-_{i_0j_0} & \longmapsto & p_{i_0j_0}p_{i_0l}d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}) - p_{i_0j_0}p_{j_0l}d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) \end{array}$$

y a continuación la composición de φ_1 y φ_4

$$\varphi_4(H_{i_0j_0k}\otimes x_l\otimes a^-_{i_0j_0}) = p_{j_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}}) - p_{i_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}}) + p^2_{i_0j_0}d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})$$

$$\varphi_1(p_{j_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})-p_{i_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})) = p_{j_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})-p_{i_0k}p_{i_0j_0}d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})+$$

$$p^2_{i_0j_0}d(\frac{q_{kl}}{q_{i_0j_0}})+p^2_{i_0j_0}(\frac{p_{i_0k}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{q_{j_0l}}{q_{i_0j_0}})+\frac{p_{j_0l}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}})-\frac{p_{i_0l}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}})-\frac{p_{j_0k}}{p_{i_0j_0}}d(\frac{q_{i_0l}}{q_{i_0j_0}})) =$$

$$= p_{i_0j_0}p_{j_0l}d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) - p_{i_0j_0}p_{i_0l}d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}})$$

$$\begin{array}{rcl} S^*\otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))\otimes\vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \stackrel{\varphi_1\circ\varphi_4}{\longrightarrow} & \Omega_{\mathbb{G}} \\ H_{i_0j_0k}\otimes x_l\otimes a^-_{i_0j_0} & \longmapsto & p_{i_0j_0}p_{j_0l}d(\frac{q_{i_0k}}{q_{i_0j_0}}) - p_{i_0j_0}p_{i_0l}d(\frac{q_{j_0k}}{q_{i_0j_0}}) \end{array}$$

Observamos que tenemos el mismo resultado, luego el diagrama conmuta.

5.2. Identificación del fibrado conormal

Por último identificaremos los espacios que estamos tratando con las expresiones utilizadas en el lema de la serpiente (sección 3.5) para poder hacer uso de él.

- $coker(f') = 0$
- $coker(f) = 0$
- $coker(f'') = 0$
- $N' = N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}}$
- $N = \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}}$
- $N'' = \Omega_{\mathbb{G}}$
- $M' = S^* \otimes S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$
- $M = S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$
- $M'' = S^* \otimes Q^*$
- $ker(f') = (S^2S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ (por ser el diagrama anterior conmutativo)
- $ker(f) = (S^2S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$
- $ker(f'') = 0$

Entonces el diagrama correspondiente al lema de la serpiente sería el siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} \arrow[u] \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{P}|\mathbb{G}} \arrow[u] \arrow[r] & \Omega_{\mathbb{G}} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^* \otimes S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & S^* \otimes Q^* \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
 & (S^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, leftrightarrow, "="] & (S^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

En la sección anterior hemos probado que el diagrama superior derecho conmuta, verificándose así las hipótesis de dicho lema. Aunque, faltaría comprobar que γ es la aplicación natural que manda $(S^2S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$ en ella misma, obteniendo de esta forma la parte alternada: $(\bigwedge^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$. Y por tanto:

$$N^*_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} = (\bigwedge^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1)$$

y

$$N_{\mathbb{G}|\mathbb{P}} = (\bigwedge^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(1)$$

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^* \otimes S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[r, "\psi_1"] & S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\
(S^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, leftrightarrow, "="] & (S^2 S^*) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \arrow[u, "\psi_2"]
\end{tikzcd}$$

conmuta si definimos γ de forma natural. Damos las aplicaciones del diagrama, primero definimos ψ_1

$$\begin{array}{ccc}
S^* \otimes S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \xrightarrow{\psi_1} & S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\
H_{i_0 j_0 k} \otimes H_{i_0 j_0 l} \otimes a_{\bar{i}_0 j_0} & \longmapsto & H_{i_0 j_0 k} \otimes H_{i_0 j_0 l} \otimes a_{\bar{i}_0 j_0}
\end{array}$$

$S^* \to H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))$ es una inclusión por formar parte de la sucesión exacta universal

Ahora definimos ψ_2 de acuerdo con lo comentado en el apartado (3.4.2) y por ser $S^* \to H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1))$ una inclusión (de la sucesión exacta universal).

$$\begin{array}{ccc} S^2S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \xrightarrow{\psi_2} & S^* \otimes H^0(\vartheta_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\ H_{i_0j_0k} \cdot H_{i_0j_0l} \otimes a_{i_0j_0}^{-} & \longmapsto & H_{i_0j_0k} \otimes H_{i_0j_0l} \otimes a_{i_0j_0}^{-} + H_{i_0j_0l} \otimes H_{i_0j_0k} \otimes a_{i_0j_0}^{-} \end{array}$$

entonces tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} S^2S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) & \xrightarrow{\gamma} & S^* \otimes S^* \otimes \vartheta_{\mathbb{G}}(-1) \\ H_{i_0j_0k} \cdot H_{i_0j_0l} \otimes a_{i_0j_0}^{-} & \longmapsto & H_{i_0j_0k} \otimes H_{i_0j_0l} \otimes a_{i_0j_0}^{-} + H_{i_0j_0l} \otimes H_{i_0j_0k} \otimes a_{i_0j_0}^{-} \end{array}$$

Por lo tanto conmuta y así tenemos la expresión que queríamos para el fibrado normal y conormal de la grassmanniana.

Referencias

[1] E. Arrondo, *Subvarieties of Grassmannians*, Lecture Note Series Dipartimento di Matematica Univ. Trento, 10 (1996).

[2] E. Arrondo, M. Bertolini, C. Turrini. *On the ampleness of the normal bundle of line congruences.* Aceptado en Forum Mat.

[3] D. Eisenbud. *Conmutative Algebra with a view Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 150. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1995.

[4] Hartshorne, Robin. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[5] K. Kendig. *Elementary algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1977. viii+309 pp.

[6] M. Schneider, J. Zintl. *The theorem of Barth-Lefschetz as a consequence of Le Potier's vanishing theorem.* Manuscripta Math., 80 (1993), 259-263.